Ein Beitrag zum Entwurf von Regelungen für Führungs-und Störungsverhalten

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

Johannes Dastych

Bochum

Bochum 1983

UNIV.
LEIDEN
KBL

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547222_0002

Ein Beitrag zum Entwurf von Regelungen für Führungs-und Störungsverhalten

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines

Doktor-Ingenieurs

der

Abteilung für Elektrotechnik

an der Ruhr-Universität Bochum

von

Johannes Dastych

Bochum

Bochum 1983

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen danke ich sehr herzlich für die wertvollen Anregungen und die großzügige Förderung während der Durchführung der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Weber gilt mein besonderer Dank für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und die Übernahme des Mitberichts.

Meinen Kollegen möchte ich für die zahlreichen Anregungen und Diskussionen danken. Mein besonderer Dank gilt Frau P. Kiesel und Fräulein H. Vollbrecht für ihre Sorgfalt und Geduld bei der Reinschrift des Manuskripts.

Dissertation eingereicht am : 19.10.1983
Tag der mündlichen Prüfung : 9.11.1983
Referent : Prof. Dr.-Ing. H. Unbehauen
Korreferent : Prof. Dr.-Ing. W. Weber

Für Gabi.

Inhaltsverzeichnis

Seite

0. Einleitung 1

1. Entwurf von Regelungen unter Berücksichtigung des Störverhaltens 4

1.1 Einführung 4

1.2 Auslegung des Regelkreises für Störverhalten 5

1.2.1 Berücksichtigung von Störungen am Eingang der Regelstrecke 7

1.2.2 Berücksichtigung von Störungen am Ausgang der Regelstrecke 11

1.3 Die Synthese des Vorfilters 15

1.3.1 Berücksichtigung der Stellgröße beim Reglerentwurf für Führungs- und Störungsverhalten 18

1.4 Anwendung des Entwurfsverfahrens 19

1.5 Erweiterung des Entwurfs für Störungs- und Führungsverhalten 47

1.5.1 Einführung 47

1.5.2 Die Struktur des Regelkreises 48

1.5.3 Die Auslegung des Regelkreises mit Stellgrößenaufschaltung 51

1.6 Reglerentwurf für Strecken mit Totzeit unter Berücksichtigung von Stör- und Führungsverhalten 53

1.6.1 Durchführung des Reglerentwurfs im Frequenzbereich 54

1.6.2 Anwendung des Verfahrens 57

1.6.3 Entwurf diskreter Regelungen für Regelstrecken mit Totzeit unter Berücksichtigung von Störungs- und Führungsverhalten 66
1.6.4 Auswertung der Synthesegleichungen 71

2. Entwurf von Zustandsreglern im Frequenzbereich mit Stör- und Führungsmodellansatz 83
2.1 Problemstellung 83
2.1.1 Die Ansätze zur Definition der Struktur des Regelkreises 83
2.2 Polynomansätze für den Zustandsregler 89
2.3 Polynomansätze für die erweiterte Störungsregelung 98
2.3.1 Störkompensation für zwei Regelgrößen 98
2.3.2 Die Reduzierung der Ordnung des Zustandsreglers unter Berücksichtigung des Führungsverhaltens 109
2.4 Beispiel zum Entwurf von Zustandsreglern im Frequenzbereich mit Stör- und Führungsmodellansatz 113

3. Die Synthese von Mehrgrössenregelungen 125
3.1 Bedingungen für die Synthese des Regelkreises 125
3.2 Der Reglerentwurf für die reduzierte Struktur des Regelkreises 134
3.2.1 Berücksichtigung des Störverhaltens 137
3.3 Entwurf von Mehrgrößenregelungen für endliche Einstellzeit 139
3.3.1 Herleitung der Entwurfsbedingungen 139
3.3.2 Berücksichtigung von Stellgrößenbegrenzungen 143
3.4 Kompensationsverfahren mit Vorgabe des Störverhaltens und Modellansatz 148
3.4.1 Indirekte Kompensation 148

3.4.2 Synthese des Regelkreises mit direkter Kompensation 157
3.4.3 Synthese des Regelkreises mit Hilfe anderer Zerlegungsvorschriften 158
3.5 Ergebnisse der Regelung von Mehrgrößensystemen 162

4. Entwurf von Regelungen für Strecken mit grossen Unbestimmtheiten 189

4.1 Einführung 189
4.1.1 Anwendung algebraischer Entwurfsmethoden 189
4.2 Reglersynthese durch Festlegung von Gebieten in der s- oder z-Ebene 208
4.2.1 Definition von Gebieten im Frequenzbereich 208
4.2.2 Anwendung auf die Regelkreissynthese im Zustandsraum 213
4.2.3 Anwendung auf die Regelkreissynthese mit dynamischer Ausgangsrückkopplung 217
4.3 Robuste Auslegung von Regelkreisen 220
4.3.1 Die Auswahl der Gebiete im s- oder z-Bereich 220
4.3.2 Reglerentwurf für eine Gleichstrommaschine 235

5. Die Auslegung von Regelkreisen mit Hilfe von Streckenapproximationen 255

5.1 Reglerentwürfe mit Hilfe von "High-Gain"- und "Low-Gain"-Technik 255
5.1.1 Reglerentwurf für Streckenapproximationen niedriger Ordnung 257
5.2 Vergleich mit anderen Entwurfsmethoden 266
5.2.1 Entwurf von Mehrgrößen-I-Reglern für stabile Regelstrecken 272

Seite

6. Zusammenfassung 275

Literatur 277

Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen 281

0. Einleitung

Der Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist die Synthese von Regelungen unter Berücksichtigung von Führungs- und Störungsverhalten. Für den Entwurf von Regelungen werden in vielen Fällen, über die triviale Forderung der Stabilität des Regelkreises hinausgehend, zahlreiche zusätzliche Bedingungen gestellt [22]. Die Erfüllung dieser Bedingungen hängt im allgemeinen von den strukturellen und parametrischen Kenntnissen über das zu regelnde System ab. Das Ziel dieser Arbeit ist es daher, für das breite Spektrum unterschiedlicher regelungstechnischer Anforderungen Syntheseverfahren anzugeben und zu erweitern.

Auf der Basis "direkter" Entwurfsmethoden, die zumeist nur eine Vorgabe des Führungsverhaltens gestatten, soll das wesentliche Ziel die Einbeziehung von Störgrößen in den Reglerentwurf sein. Diese Ergänzung ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn verschiedene Eingriffsorte der Störungen berücksichtigt werden können [33,34]. Als Störungen sind hier ebenfalls Unbestimmtheiten der Regelstrecke zu interpretieren. Die Anwendung von Frequenzbereichsmethoden führt dabei auf die Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme, die z. B. mit Hilfe von Standardprogrammen zur Matrizenbehandlung durchgeführt werden kann. Ein Teil dieser Arbeit besteht somit darin, die in [33] und [34] angegebenen Synthesemethoden so zu erweitern, daß Parameterunsicherheiten der Regelstrecke in die Entwurfsmethode einbezogen werden können. Zur Ergänzung dieser Methoden wird als weitere Teillösung, basierend auf den Ansätzen aus [37], ein einfaches algebraisches Verfahren zur Synthese von Regelungen für Totzeitsysteme angegeben.

Liegen mehrere Systemmeßgrößen vor, so ist es sinnvoll, diese Informationen für die Synthese zu nutzen. Der Entwurf im Frequenzbereich läßt sich dann so erweitern, daß mit Hilfe von Störbeobachtern die Einflüsse nahezu beliebiger Störsignale auf die Regelgröße kompensiert werden können [12,13,14]. Zu untersuchen ist

hier jedoch, ob der relativ große Realisierungsaufwand die Störkompensation mehrerer Meßgrößen zuläßt oder ob der Aufwand zur Störkompensation der Regelgröße bei Beibehaltung der Anforderungen wesentlich verringert werden kann.

Bei Mehrgrößensystemen wird die Entwurfsproblematik zusätzlich zur Vorgabe von Führ- und Störungsverhalten meist noch durch die Entkopplung der Regelgrößen und Kopplungsbedingungen für die Stellgrößen erweitert [2,5,6,40,42]. Im Gegensatz zu [40] und [42] soll hier jedoch wie in [2] auf die rechtsprime Darstellung der Strekkenübertragungsmatrix verzichtet werden. Die Ziele sind hier wiederum, algebraische Methoden zu entwickeln, die sowohl eine erweiterte Regelkreisstruktur [42] berücksichtigen, als auch spezielle Zielsetzungen, wie z. B. die Forderung nach minimaler Einstellzeit und Entkopplung zulassen. Liegt, im Gegensatz zu der in [40] zitierten Regelkreisstruktur, die als "Zustandsregelung im Frequenzbereich" interpretiert werden kann, eine Standardstruktur vor, so ist hier eine Ergänzung mit streckenparameterunabhängigen Elementen zur Beeinflussung des Führungsverhaltens notwendig.

Sind zur Erfüllung der genannten Bedingungen exakte Kenntnisse der Regelstrecken in Hinsicht auf Struktur und Parameter notwendig, so kann dies meist nicht in allen Fällen gewährleistet werden. Daher wird auch der Entwurf von Regelungen für Strecken mit großen Unbestimmtheiten zu betrachten sein. Die Idee besteht wiederum darin, algebraische Entwurfsmethoden anzuwenden. Hierbei wird ein Gütefunktional definiert, das die verschiedenen Betriebspunkte der Regelstrecke mit in die Entwurfsstrategie einbezieht. Die Struktur der Regelstrecke muß hier allerdings bekannt sein. Diese Einschränkung kann für ein weiteres Verfahren aufgegeben werden. Hier werden die Anforderungen an den Regelkreis so formuliert, daß Stabilitätsgütegebiete im s- oder z-Bereich festgelegt werden [1]. Anschließend erfolgen Transformationen in den Raum der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms und der Reglerparameter. Praktiziert wird dieses Verfahren für

Zustandsregler. Sinnvoll wäre hier eine Ergänzung in der Form, das Verfahren auf dynamische Ausgangsrückkopplung zu erweitern. Hierdurch ist es dann möglich, die simultane Reglersynthese auch für strukturinvariante Regelstrecken anzuwenden. Als Ergänzung zu dieser Fragestellung muß die Frage diskutiert werden, welche Eigenschaften und Parameter die Minimalvoraussetzungen für den Entwurf von Regelungen sind. So werden in [21] und [25] nur Kenntnisse über das statische Verhalten berücksichtigt. Da diese Verfahren jedoch von unterschiedlichen Lösungsansätzen ausgehen, ist es hier notwendig, systemtheoretische Gemeinsamkeiten zu diskutieren und die Anwendbarkeit mit einem gegebenen System zu überprüfen.

1. Entwurf von Regelungen unter Berücksichtigung des Störverhaltens

1.1 Einführung

Für die Regelkreissynthese haben sich viele graphische Verfahren zur Bestimmung der Reglerübertragungsfunktion bewährt. Als wichtigste Vertreter dieser Gattung seien hier erwähnt:

- Reglersynthese nach dem Frequenzkennlinien-Verfahren,
- Wurzelortskurvenverfahren und dem
- Nicholsdiagramm.

Die einzelnen Verfahren werden, neben vielen anderen Bezeichnungen, auch als "Entwurf im Frequenzbereich" charakterisiert. Das heißt, daß im Frequenzbereich spezifizierte Gütemaße, wie z. B.:

- Phasenreserve, Amplitudenreserve,
- Dämpfung bei hohen Frequenzen,
- Bandbreite des geschlossenen Regelkreises,
- Durchtrittsfrequenz

usw. definiert werden. Vorgaben im Zeitbereich, wie z. B.:

- Anregelzeit,
- Überschwingen und
- Ausregelzeit

werden in entsprechende Daten für den Frequenzbereich umgerechnet und dann als Gütemaße definiert. Die iterative Vorgehensweise bei diesen Verfahren, wie z. B. Hinzufügen von phasenanhebenden und phasenabsenkenden oder anderen Kompensationsgliedern und Überprüfung der einzuhaltenden Regelungsanforderungen in jedem Entwurfsschritt, charakterisieren diese Methoden als Probierverfahren. Oft ist eine gleichzeitige Berücksichtigung des Störverhaltens nur schwer in die Entwurfsstrategie mit einzubeziehen und wird in den meisten Fällen nur durch den "klassischen" I-Anteil berück-

sichtigt. Im Gegensatz zu diesen "indirekten" Methoden erlauben analytische Synthesemethoden die "direkte" Vorgabe des Regelverhaltens des geschlossenen Regelkreises, da durch Vorgabe des Führungsübertragungsverhaltens bzw. der entsprechenden Übergangsfunktionen die regelungstechnischen Anforderungen formuliert werden können. Die Reglersynthese selbst wird durch die Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme vorgenommen. Basis für diese Entwürfe sind Kataloge, in denen das Übertragungsverhalten des Regelkreises entweder nach bestimmten Optimalitätsbedingungen oder anderen Kriterien zusammengefaßt ist. Eine ausführliche Darstellung und die Anwendung solcher "Standard-Formen" ist z. B. in [33] zu finden. Im folgenden Abschnitt wird ein analytisches Verfahren vorgestellt, das bereits in [33] eingeführt wurde, jedoch hier in erweiterter und ergänzter Form als Beispiel für den direkten Entwurf von Regelungen unter Berücksichtigung des Störverhaltens und des Eingriffortes der Störung dienen und gleichzeitig in die Thematik des "direkten" Entwurfs von Regelungen einführen soll. Außerdem dient dieser Beitrag als Grundlage zum späteren Entwurf robuster Regelungen mit Hilfe algebraischer Verfahren.

1.2 Auslegung des Regelkreises für Störverhalten

Betrachtet wird die Standardregelkreisstruktur nach Bild 1.2.1.

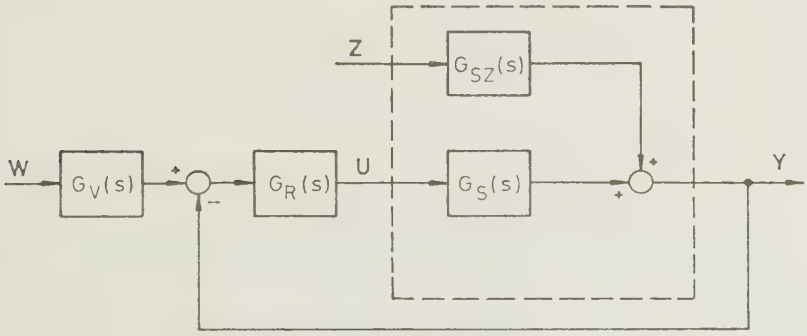


Bild 1.2.1. Regelkreis für Führungs- und Störverhalten

Für die Ableitung der Synthesemethode werden die einzelnen Regelkreiselemente wie folgt gekennzeichnet:

Die Regelstrecke wird bezeichnet als

$$G(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_o + d_1 s + \ldots + d_m s^m}{c_o + c_1 s + \ldots + s^n} \quad \text{mit } n > m. \tag{1.2.1}$$

Der Regler hat die Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_o + b_1 s + \ldots + b_w s^w}{a_o + a_1 s + \ldots + a_z s^z}, \quad z \geq w \tag{1.2.1a}$$

und das Vorfilter

$$G_V(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{m_o + m_1 s + \ldots + m_x s^x}{n_o + n_1 s + \ldots + n_y s^y} \quad \text{mit } y \geq x. \tag{1.2.1b}$$

Der Störeinfluß wird durch die Übertragungsfunktion $G_{SZ}(s)$ charakterisiert, wobei diese Übertragungsfunktion dazu benutzt wird, verschiedene Eingriffsorte der Störungen mit in die Synthese einzubeziehen. Als Forderung für den Entwurf des Regelkreises wird die Führungsübertragungsfunktion

$$K_W(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_o + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_v s^v}{\beta_o + \beta_1 s + \ldots + s^u} \quad \text{mit } u > v, \; \alpha_o \geq \beta_o \tag{1.2.2}$$

und die Störübertragungsfunktion

$$K_Z(s) = \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = \frac{\gamma_o + \gamma_1 s + \ldots + \gamma_q s^q}{\sigma_o + \sigma_1 s + \ldots + s^p}, \quad p \geq q \tag{1.2.2a}$$

festgelegt.

Für den Reglerentwurf ist nach Bild 1.2.1 die Führungsübertragungsfunktion

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = G_V(s) \frac{G_R(s)\ G(s)}{1 + G_R(s)\ G(s)} \stackrel{!}{=} K_W(s) \tag{1.2.3}$$

und die Störungsübertragungsfunktion

$$G_Z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{G_{SZ}(s)}{1 + G_R(s)\ G(s)} \stackrel{!}{=} K_Z(s) \tag{1.2.4}$$

maßgebend. Aus Gl.(1.2.4) läßt sich leicht ermitteln

$$G_R(s) = \frac{G_{SZ}(s) - K_Z(s)}{G(s)\ K_Z(s)} \ . \tag{1.2.5}$$

1.2.1 Berücksichtigung von Störungen am Eingang der Regelstrecke

Hierfür läßt sich mit Hilfe der Gln.(1.2.1), (1.2.2) und (1.2.5) schreiben

$$G_R(s) = \frac{D(s)\ \sigma(s) - C(s)\ \gamma(s)}{D(s)\ \gamma(s)} \ , \tag{1.2.6}$$

wenn $G_{SZ}(s) = G(s)$ gesetzt wird. Damit die Realisierbarkeitsbedingung $z \geq w$ gilt, muß nach [33] die Bedingung

$$m + p = n + q,$$

also

$$n - m = p - q \tag{1.2.7}$$

erfüllt sein. Daraus folgt, daß im Zähler von $G_R(s)$ mindestens

$$m + p - (m+q) = p - q = n - m \tag{1.2.8}$$

Terme höchster Potenzen verschwinden müssen. Damit hat das Zähler- und Nennerpolynom von $G_R(s)$ den Grad

$$w = z = (m+p) - (p-q) = m + q \ . \tag{1.2.9}$$

Da der Grad dieser Polynome minimal werden soll, wird

$$q = n - m \tag{1.2.10}$$

und

$$p = q + n - m = 2(n-m)$$

gewählt, was zur Folge hat

$$w = z = n\,. \tag{1.2.11}$$

Damit beim Auftreten sprungförmiger Störsignale die Regelabweichung e(t) die Bedingung $\lim_{t\to\infty} e(t)$ erfüllt, gilt $\gamma_o = 0$ in der Störübertragungsfunktion $K_Z(s)$. Im anderen Fall müßte, wie später im Kapitel 2 erläutert wird, das Nennerpolynom des Reglers selbst die charakteristische Gleichung des Störmodells enthalten.

Faßt man mit diesen Ansätzen die Koeffizienten von $\gamma(s)$ und $\sigma(s)$ der Übertragungsfunktion $K_Z(s)$ zum $3(n-m)\times 1$-Vektor

$$\underline{k}_Z^T = [\sigma_o,\ \sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_{2(n-m)-1},\ -\gamma_1,\ \ldots,\ -\gamma_{n-m}] \tag{1.2.12}$$

zusammen, so folgt für das Zählerpolynom des Reglers nach Gl.(1.2.6) die Rechenvorschrift

$$\underline{M}\ \underline{k}_Z + \underline{d} = \underline{b}\,. \tag{1.2.13}$$

Die $(2n-m+1)\times 1$-Vektoren $\underline{d}$ und $\underline{b}$ enthalten die Koeffizienten des Polynoms D(s) bzw. B(s) in folgender Form:

$$\underline{d}^T = [0,\ \ldots,\ 0,\ d_o,\ d_1,\ \ldots,\ d_m], \tag{1.2.14}$$

$$\underline{b}^T = [b_o,\ b_1,\ \ldots,\ b_n,\ 0,\ \ldots,\ 0]. \tag{1.2.15}$$

Die $((2n+1-m)\times(3n-m))$-Matrix $\underline{M}$ enthält in $2(n-m)$ Spalten die Koeffizienten des Polynoms D(s) und hat die Struktur

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} d_o & 0 & & & 0 & 0 & & \\ & & \underline{0} & & & & & \\ d_1 & d_o & & & c_o & 0 & & \\ \vdots & d_1 & \ddots & d_o & c_1 & c_o & \ddots & \\ d_m & \vdots & & d_1 & \vdots & c_1 & \ddots & c_o \\ & d_m & & \vdots & c_{n-1} & \vdots & & c_1 \\ & \underline{0} & \ddots & d_m & 1 & c_{n-1} & & \vdots \\ & & & & & 1 & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} . \qquad (1.2.16)$$

So ist z. B. für $n = 2$ und $m = 0$

$$G(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_o}{c_o + c_1 s + s^2} ,$$

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_o + b_1 s + b_2 s^2}{a_o + a_1 s + a_2 s^2}$$

und

$$K_Z(s) = \frac{\gamma(s)}{\sigma(s)} = \frac{\gamma_1 s + \gamma_2 s^2}{\sigma_o + \sigma_1 s + \sigma_2 s^2 + \sigma_3 s^3 + s^4} .$$

Für die Gln.(1.2.13) bis (1.2.16) folgt somit

$$\begin{bmatrix} d_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_o & 0 & 0 & c_o & 0 \\ 0 & 0 & d_o & 0 & c_1 & c_o \\ 0 & 0 & 0 & d_o & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_o \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Für $\gamma(s)$ bedeutet dies

$$\gamma_2 = d_o$$

und

$$\gamma_1 = d_o(\sigma_3 - c_1).$$

Hieraus wird deutlich, daß das Störungsübertragungsverhalten nicht frei wählbar ist, sondern nur die Eigendynamik des Störungseinflusses, also die Pole der Störungsübertragungsfunktion. Die Koeffizienten des Zählerpolynoms sind in diesem Fall abhängig von denen des Nennerpolynoms $\sigma(s)$.

Die Koeffizienten des Nennerpolynoms von $G_R(s)$ berechnen sich aus

$$\underline{D}\ \underline{\gamma}' = \underline{a}, \tag{1.2.17}$$

wobei der (nx1)-Vektor

$$\underline{a}^T = [a_1, \ldots a_n] \tag{1.2.18}$$

die zu bestimmenden Reglerparameter enthält und die (nx(n-m))-Matrix gegeben ist durch

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} d_o & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ d_1 & & d_o \\ \vdots & & \vdots \\ d_m & & \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & d_m \end{bmatrix}. \tag{1.2.19}$$

Der (n-m)x1-Vektor $\underline{\gamma}'$ enthält nur die Koeffizienten des Polynoms $\gamma(s)$, also

$$\underline{\gamma}'^T = [\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-m}]. \tag{1.2.20}$$

Mit diesen Ansätzen folgt für das angegebene Beispiel

$$G_R(s) = \frac{\sigma_o + [\sigma_1 - c_o(\sigma_3 - c_1)]s + [\sigma_2 - c_o - c_1(\sigma_3 - c_1)]s^2}{d_o(\sigma_3 - c_1)s + d_o s^2} .$$

1.2.2 Berücksichtigung von Störungen am Ausgang der Regelstrecke

Mit $G_{S\ddot{Z}}(s) = 1$ liefern die Gln.(1.2.1), (1.2.2) und (1.2.5) die Reglerübertragungsfunktion

$$G_R(s) = \frac{C(s)[\sigma(s) - \gamma(s)]}{D(s)\ \gamma(s)} . \qquad (1.2.21)$$

Dies bedeutet hier, daß im Zähler die Bedingung

$$p = q \qquad (1.2.22)$$

erfüllt sein muß. Es müssen also mindestens

$$n+p-(m+q) = n-m \qquad (1.2.23)$$

Terme höchster Potenzen im Zähler verschwinden. Wie im ersten Fall ist also

$$w = z = q+n-(n-m) = m+q. \qquad (1.2.24)$$

Für

$$q = p = n-m$$

ist somit

$$w = z = n. \qquad (1.2.25)$$

Bei Anwendung des Reglers nach Gl.(1.2.21) ist zu berücksichtigen, daß die Pole der Streckenübertragungsfunktion gegen die Nullstellen der Reglerübertragungsfunktion gekürzt werden. Variieren die Strekkenparameter nur geringfügig, so kommt es bei Strecken mit Polen

in der rechten s-Halbebene auch zu instabilem Verhalten des Regelkreises. Der Reglerentwurf muß daher modifiziert werden. Hier soll jedoch zuerst der Fall betrachtet werden, daß C(s) nur Nullstellen in der linken s-Halbebene besitzt. Da das Störverhalten des Regelkreises gegeben ist durch

$$K_Z(s) = \frac{\gamma_1 s + \gamma_2 s^2 + \ldots + \gamma_{n-m} s^{n-m}}{\sigma_o + \sigma_1 s + \ldots + s^{n-m}} \tag{1.2.26}$$

und n-m Terme im Zähler von Gl.(1.2.21) verschwinden müssen, folgt direkt

$$\sigma_i - \gamma_i = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-m \tag{1.2.27}$$

und $\sigma_{n-m} = 1$. Gl.(1.2.26) kann somit geschrieben werden als

$$K_Z(s) = 1 - \frac{\sigma_o}{\sigma(s)} \; . \tag{1.2.28}$$

Die Reglerübertragungsfunktion läßt sich vereinfachen zu

$$G_R(s) = \frac{C(s)\ \sigma_o}{D(s)\,[\sigma(s) - \sigma_o]} \tag{1.2.29}$$

Bei instabilen Regelstrecken kann das Nennerpolynom dargestellt werden als

$$C(s) = C_S(s)\ C_I(s), \tag{1.2.30}$$

wobei $C_S(s)$ Nullstellen in der linken offenen s-Halbebene und $C_I(s)$ Nullstellen in der rechten s-Halbebene enthält. Die Grade der Polynome $C_I(s)$ und $C_S(s)$ werden mit n_I und n_S festgelegt. Mit dem Ansatz

$$\gamma(s) = C_I(s)\ \psi(s) \tag{1.2.31}$$

ergibt Gl.(1.2.21) die Reglerübertragungsfunktion

$$G_R(s) = \frac{C_S(s)\,[\sigma(s) - C_I(s)\ \psi(s)]}{D(s)\ \psi(s)}. \qquad (1.2.32)$$

Ohne erneute Analyse der Realisierbarkeitsbedingungen kann Gl. (1.2.32) nicht angewendet werden. Wird der Grad des Polynoms $\psi(s)$ als λ festgelegt, so gilt für Gl.(1.2.32) entsprechend

$$p = n_I + \lambda\,. \qquad (1.2.33)$$

Im Zählerpolynom von $G_R(s)$ müssen mindestens $n_S + p-m-\lambda$ Terme höchster Potenzen verschwinden. Somit gilt

$$w = z = (m+\lambda) = n, \qquad (1.2.34)$$

$$\lambda = n - m$$

und

$$p = n_I + n - m. \qquad (1.2.35)$$

Zur Ermittlung des Zählerpolynoms in Gl.(1.2.32) können die Koeffizienten des Polynoms

$$C_I(s)\ \psi(s) = (c_{oI} + c_{1I}s + \ldots + s^{n_I})(\psi_1 s + \psi_2\ s^2 + \ldots + \psi_{n-m}\ s^{n-m})$$

$$= \varepsilon_1 s + \varepsilon_2\ s^2 + \ldots + \varepsilon_{n_I+n-m}\ s^{n_I+n-m} \qquad (1.2.36)$$

in der Form

$$\underline{C}_I\ \underline{\psi} = \underline{\varepsilon} \qquad (1.2.37)$$

dargestellt werden. Hierbei enthält die $((n_I+n-m)\times(n-m))$-Matrix $\underline{C}_I$ die Koeffizienten des Polynoms $C_I(s)$

$$\begin{bmatrix} c_{oI} & 0 & & \\ & & \ddots & \underline{0} \\ c_{1I} & c_{oI} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & c_{1I} & & \\ c_{n_I} & \vdots & & c_{oI} \\ & & & \vdots \\ 1 & c_{n_I} & & \\ & & & \\ & 1 & \ddots & \\ \underline{0} & & & 1 \end{bmatrix} = \underline{c}_I . \qquad (1.2.38)$$

Der (n-m)x1-Vektor ψ und der (n_I+n-m)x1-Vektor $\underline{\varepsilon}$ sind hierbei definiert als

$$\underline{\psi}^T = [\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-m}]$$

und (1.2.39)

$$\underline{\varepsilon}^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n_I+n-m}] .$$

Die angesetzten Realisierbarkeitsbedingungen haben zur Folge, daß für Gl.(1.2.36)

$$\varepsilon_i = \sigma_i \text{ für } i = n_I+1, \ldots, n_I+n-m \qquad (1.2.40)$$

gilt. Daraus ergibt sich die Übertragungsfunktion des Reglers

$$G_R(s) = \frac{C_S(s)\,[\sigma_o+(\sigma_1-\varepsilon_1)s + \ldots + (\sigma_{n_I}-\varepsilon_{n_I})\, s^{n_I}]}{D(s)\;\psi(s)} , \qquad (1.2.41)$$

wobei die Zähler- und Nennerkoeffizienten, unter Berücksichtigung der entsprechenden Polynomgrade, analog zu den Gln.(1.2.17) und (1.2.37) vorgenommen werden können.

Für das bereits genannte Beispiel wird nun angenommen: $n = 2$, $m = 0$ und $n_I = n_S = 1$. Gl.(1.2.37) hat die Form

$$\begin{bmatrix} c_{oI} & 0 \\ 1 & c_{oI} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Gl.(1.2.40) liefert die Reglerübertragungsfunktion

$$G_R(s) = \frac{C_S(s)[\sigma_o + (\sigma_1 - \varepsilon_1)s]}{d_o(\psi_1 s + \psi_2 s^2)}$$

mit

$$\psi_1 = \sigma_2 - c_{oI},$$

$$\psi_2 = 1$$

und

$$\varepsilon_1 = c_{oI}(\sigma_2 - c_{oI}).$$

1.3 Die Synthese des Vorfilters

Aus den Gln.(1.2.3) und (1.2.4) folgt unmittelbar

$$G_V(s) = \frac{G_{SZ}(s)\ K_W(s)}{G_R(s)\ G(s)\ K_Z(s)}. \qquad (1.3.1)$$

Greift die Störung am Eingang der Regelstrecke an, so ist $G_{SZ}(s) \equiv G(s)$, und somit ist

$$G_V(s) = \frac{\alpha(s)\ A(s)\ \sigma(s)}{\beta(s)\ B(s)\ \gamma(s)}. \qquad (1.3.2)$$

Bei Störungen am Ausgang der Regelstrecke gilt hingegen $G_{SZ}(s) = 1$ und

$$G_V(s) = \frac{\alpha(s)\ A(s)\ C(s)\ \sigma(s)}{\beta(s)\ B(s)\ D(s)\ \gamma(s)}. \qquad (1.3.3)$$

Im ersten Fall war ermittelt worden $w = z = n$, $q = n-m$ und $p = 2(n-m)$. Berücksichtigt man, daß nach Gl.(1.2.6) $A(s) = D(s)\ \gamma(s)$ ist, so ist das Vorfilter nach Gl.(1.3.2)

$$G_V(s) = \frac{\alpha(s)\ D(s)\ \sigma(s)}{\beta(s)\ B(s)} = \frac{M(s)}{N(s)} . \qquad (1.3.4)$$

Gesucht sind nun Bedingungen für das mögliche Führungsübertragungsverhalten. Diese folgen direkt aus der Realisierbarkeit von $G_V(s)$, die durch

$$u \geq n - m + v \qquad (1.3.5)$$

gegeben ist. Mit $v > 0$ ist es möglich, instabile Anteile in $B(s)$ zu kompensieren. Hiermit ist der Grad des Zählerpolynoms $M(s)$

$$x = m + v + 2(n-m) \qquad (1.3.6)$$

und der des Nennerpolynoms

$$y = n + u . \qquad (1.3.7)$$

In vielen Anwendungsfällen ist es sinnvoll, einige oder alle Pole der Störungs- und der Führungsübertragungsfunktion identisch zu wählen. Dies hat auch den Effekt, daß sich der Realisierungsaufwand für das Vorfilter erheblich reduziert. Es war festgelegt worden

$$\sigma(s) = \sigma_o + \sigma_1 s + \ldots + s^{2(n-m)} ,$$

und speziell für $v = 0$ gilt entsprechend Gl.(1.3.5) bei minimaler Realisierung

$$\beta(s) = \beta_o + \beta_1 s + \ldots + s^{(n-m)} .$$

Mit dem Ansatz

$$\sigma(s) = \beta(s)\ (s + \alpha_o')^{n-m}, \quad \alpha_o' > 0 \qquad (1.3.8)$$

wird das Vorfilter reduziert zu

$$G_V(s) = \frac{\beta_o\ D(s)\ (s + \alpha_o')^{n-m}}{B(s)} , \qquad (1.3.9)$$

vorausgesetzt B(s) hat nur Nullstellen in der linken s-Halbebene. Die Ordnung des Vorfilters wird hierbei um n-m reduziert. Hat B(s) v Nullstellen $B_I(s)$ in der rechten s-Halbebene, ist hier wiederum die Darstellung $B(s) = B_S(s)\ B_I(s)$ möglich. Für $n - m > v$ ist die Führungsübertragungsfunktion

$$K_W(s) = \frac{K\ B_I(s)}{\beta'(s)\,(s + \alpha_o')^v} = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} \text{ für } \alpha_o' > 0 \text{ und } K = \frac{\beta_o'\ \alpha_o'}{b_{Io}}\ ; \tag{1.3.10}$$

b_{Io} und β_o sind die Absolutkoeffizienten der Polynome $B_I(s)$ bzw. $\beta'(s)$. Dann kann gewählt werden

$$\sigma(s) = \beta'(s)(s + \alpha_o')^{n-m}, \tag{1.3.11}$$

wobei $\beta'(s)$ selbst ein Polynom des Grades (n-m) ist und wegen Gl. (1.3.10) nur Nullstellen in der linken s-Halbebene haben darf. Für das Vorfilter folgt schließlich

$$G_V(s) = \frac{K\ D(s)\,(s + \alpha_o')^{n-m-v}}{B_S(s)}\ . \tag{1.3.12}$$

In Analogie zu obigen Überlegungen lautet die Realisierbarkeitsbedingung für Gl.(1.3.3), wenn hier ebenfalls $A(s) = D(s)\ \gamma(s)$ berücksichtigt wird

$$u \geq n - m + v$$

und ist somit identisch zu Gl.(1.3.5). Hat B(s) nur Nullstellen in der linken s-Halbebene, so gilt für $v = 0$

$$u = p = n - m, \tag{1.3.13}$$

so daß hier $\sigma(s) = \beta(s)$ gesetzt werden kann. Außerdem gilt in Gl. (1.2.28) $B(s) = C(s)\ \sigma_o$, was zur Folge hat, daß

$$G_V(s) = \frac{\beta_o}{\sigma_o} \tag{1.3.14}$$

ist.

Bei Anwendung der Gln.(1.2.29), (1.2.30) und $A(s) = D(s)\ \psi(s)$ ergibt Gl.(1.3.3) die Vorfilterübertragungsfunktion

$$G_V(s) = \frac{\beta_o\ \sigma(s)}{\beta(s)\,[\sigma_o + (\sigma_1 - \varepsilon_1)s + \ldots + (\sigma_{n_I} - \varepsilon_{n_I})\ s^{n_I}]}\ . \qquad (1.3.15)$$

1.3.1 Berücksichtigung der Stellgröße beim Reglerentwurf für Führungs- und Störungsverhalten

Wird die angegebene Reglersynthese auf der Basis von "Standard-Formen", wie sie z. B. in [33] oder in [38] in der Form

$$K_W(s) = \frac{\omega_o^n}{\omega_o^n + \varepsilon_1\ \omega_o^{n-1}\ s + \ldots + s^n} \qquad (1.3.16)$$

vorgestellt sind, durchgeführt, so müssen zur Wahl von ω_o einige Anmerkungen gemacht werden. Nach Bild 1.2.1 ist die Stellgröße gegeben durch

$$U(s) = \frac{G_V(s)\ G_R(s)}{1 + G_R(s)\ G(s)}\ W(s) - \frac{G_R(s)\ G(s)}{1 + G_R(s)\ G(s)}\ Z_E(s)$$

$$- \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s)\ G(s)}\ Z_A(s)\ . \qquad (1.3.17)$$

Die Abkürzung $Z_E(s)$ beschreibt hier Störungen am Eingang der Regelstrecke, also $G_{SZ}(s) = G(s)$. $Z_A(s)$ kennzeichnet Störungen am Ausgang der Regelstrecke, hierbei ist $G_{SZ}(s) = 1$. Berücksichtigt man die Gln.(1.2.3) und (1.2.4) für die Auslegung auf Störungen am Eingang der Regelstrecke, so ist

$$U(s) = \frac{K_W(s)}{G(s)}\ W(s) - G_R(s)\ K_Z(s)\ Z_E(s) - \frac{G_R(s)}{G(s)}\ K_Z(s)\ Z_A(s)\ . \qquad (1.3.18)$$

Für sprungförmige Störungen am Eingang der Regelstrecke ($Z_E(s)$) und am Ausgang der Regelstrecke ($Z_A(s)$) ist die entsprechende Stellgröße für den Zeitpunkt $t = 0$ Null bzw. durch die Reglerverstärkung und durch $\sigma(s)$ bestimmt. Für die Führungsübertragungsfunktion wird hier $v = 0$ und $u = n-m$ berücksichtigt. Der Grenzwertsatz der Laplace-Transformation liefert für das Führungsverhalten die Beziehung

$$u_W(0) = \frac{\omega_o^{n-m}}{d_m} , \qquad (1.3.19)$$

wenn $K_W(s)$ wie in Gl.(1.3.16) angesetzt wird. Ein identisches Ergebnis erhält man auch für den Fall, wenn der Regelkreis für Störungen am Ausgang der Regelstrecke ausgelegt wird. Gl.(1.3.19) zeigt deutlich, daß die durch das Führungssignal hervorgerufene Stellgröße direkt proportional dem Zeitnormierungsfaktor ω_o^{n-m} ist. Beim Entwurf des Regelkreises ist also ein Kompromiß zwischen dem Dynamikbereich der Stellgröße und der Anregelzeit, also der "Schnelligkeit" des Systems, zu machen.

1.4 Anwendung des Entwurfsverfahrens

Die Anwendung dieses Verfahrens soll an einem Modell eines Schwebeflugkörpers [35] gezeigt werden. Gegeben ist das Flugmodell nach Bild 1.4.1.

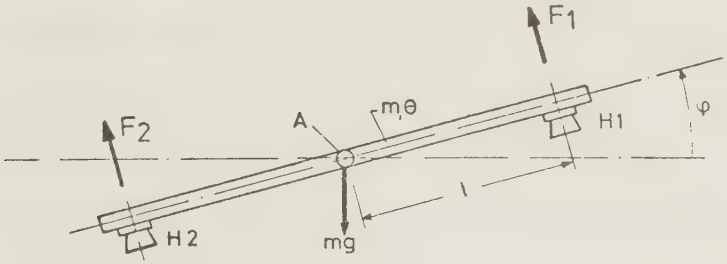


Bild 1.4.1. Modell eines Schwebeflugkörpers

Hierbei sind zwei Propellermotoren symmetrisch zur Längsachse angeordnet. Das entstehende Moment ist gegeben durch

$$M(t) = (F_1(t) - F_2(t))l = \Theta \cdot \ddot{\varphi}(t) \qquad (1.4.1)$$

wobei $F_1(t)$ und $F_2(t)$ die Hubkräfte sind und Θ das Gesamtträgheitsmoment des Aufbaus berücksichtigt. Im linearen Bereich ist die Hubkraft eines Motors in Abhängigkeit der Klemmenspannung gegeben durch

$$F_1 = a\, U_{M1} + b\,. \tag{1.4.2}$$

Das Stellverhalten für beide Hubmotoren in Abhängigkeit der Stellgröße U_M wird bestimmt durch

$$U_{M1} = K_V(-U_o + \frac{1}{1.5}\, U_M)$$

$$U_{M2} = K_V(-U_o - \frac{1}{1.5}\, U_M)\,. \tag{1.4.3}$$

U_o ist hier der mit Gl.(1.4.2) eingestellte Arbeitspunkt und K_V der Verstärkungsfaktor der Leistungsverstärker. Im Arbeitspunkt ist somit der statische Verstärkungsfaktor mit Hilfe von Gl.(1.4.1) festgelegt als

$$K_M = \frac{M}{U_M} = \frac{(F_1 - F_2)\,l}{U_M} = 2a\,\frac{K_V}{1.5}\,l\,. \tag{1.4.4}$$

Das dynamische Verhalten der Propellermotoren hat in guter Näherung das PT1-Verhalten

$$\frac{M(s)}{U_M(s)} = G_M(s) = \frac{K_M}{1 + sT_M}\,. \tag{1.4.5}$$

Die Winkelmessung wird mit Hilfe eines Potentiometers durchgeführt, und ist demnach nur mit der Proportionalitätskonstante $K_\varphi = \frac{U_\varphi(s)}{\varphi(s)}$ zu berücksichtigen. Das Übertragungsverhalten der Regelstrecke läßt sich zusammenfassen zu

$$\frac{U_\varphi(s)}{U_M(s)} = \frac{M(s)}{U_M(s)}\,\frac{\varphi(s)}{M(s)}\,\frac{U_\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{K_M}{1 + sT_M}\,\frac{1}{\Theta s^2}\,K_\varphi$$

$$= \frac{K_\varphi\, K_M}{\Theta}\,\frac{1}{(1 + sT_M)\,s^2}\,, \tag{1.4.6}$$

womit sich nach Einsetzen der Daten die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+s_o)} \qquad (1.4.7)$$

mit den nominellen normierten Werten $K = K_N = \frac{K_\varphi K_M}{\ldots T_M} = 4$ und $s_o = \frac{1}{T_M} = 4$ ergibt. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß die Hubmotoren in verschiedenen Arbeitspunkten betrieben werden sollen. Da die Hubkraft eines Motors in Abhängigkeit der Klemmenspannung jedoch nichtlineares Verhalten zeigt, bedingt dies auch eine Veränderung des statischen Verstärkungsfaktors K_M und damit K. Im Modell wird deshalb für K berücksichtigt

$$K_{min} = 3 \leq K \leq 6 = K_{max}.$$

Die Motorzeitkonstante T_M wird als konstant, also als unabhängig vom Arbeitspunkt angenommen. Zugrundegelegt werden sprungförmige Störungen am Eingang der Regelstrecke.

Da für die Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$$G(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_o}{c_o + c_1 s^2 + c_2 s^2 + s^3} = \frac{d_o}{4s^2 + s^3}$$

n = 3 und m = 0 gilt, kann für die Führungsübertragungsfunktion K_W nach Gl.(1.3.3) ebenfalls eine Übertragungsfunktion dritter Ordnung gewählt werden. Damit ist u = 3 und v = 0. Die Synthese des Regelkreises soll nach dem Kriterium für die minimale zeitbeschwerte betragslineare Regelfläche ($\int_0^\infty e|t|\,dt$ - Form) entworfen werden. In [11] ist das dazugehörige Standardpolynom und die daraus resultierende Übertragungsfunktion

$$K_W(s) = \frac{x(s)}{\xi(s)} = \frac{\omega_o^3}{\omega_o^3 + 2.15\,\omega_o^2 s + 1.75\,\omega_o s^2 + s^3} = \frac{\beta_o}{\beta_o + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + s^3}. \qquad (1.4.8)$$

Um die Ordnung des Vorfilters zu reduzieren, wird entsprechend Gl. (1.3.8) der Ansatz

$$\delta(s) = \beta(s)\ (s+\alpha_o')^3 \text{ mit } \alpha_o \geq 0 \tag{1.4.9}$$

gemacht. Die Koeffizienten δ_i für $i = 0, \ldots, 5$ lassen sich hierbei mit Hilfe des Rechenschemas

$$\begin{bmatrix} \beta_o & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_o & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_o \\ 1 & \beta_2 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_o'^3 \\ 3\alpha_o'^2 \\ 3\alpha_o' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_o \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_o \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{bmatrix} \tag{1.4.10}$$

berechnen. Gl.(1.2.13) kann geschrieben werden als

$$\left[\begin{array}{cccc:ccccc} d_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_o & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & d_o & 0 & 1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_o & 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \delta_o \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \\ -\gamma_3 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_o \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right], \tag{1.4.11}$$

wodurch einerseits mit

$$\underline{M}' \underline{\gamma}' + \underline{d}' = \begin{bmatrix} 1 & c_2 & 0 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \\ -\gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_o\delta_4 \\ d_o\delta_5 \\ d_o \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad (1.4.12)$$

das Zählerpolynom von $K_{ZE}(s)$, also $\gamma(s)$, und andererseits durch

$$\begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_o \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_2\gamma_1 \end{bmatrix} \qquad (1.4.13)$$

die Reglerübertragungsfunktion $G_R(s)$ festgelegt ist. Der numerische Aufwand bei dieser Methode beschränkt sich also im wesentlichen auf die Inversion der Matrix $\underline{M}'$ aus Gl.(1.4.12), so daß nach Auswertung von Gl.(1.4.13) der Regler als

$$G_R(s) = \frac{\delta_o + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + (\delta_3 - c_2(\delta_4 - c_2(\delta_5 - c_2)))\ s^3}{d_o(\delta_4 - c_2(\delta_5 - c_2))\ s + d_o(\delta_5 - c_2)\ s^2 + d_o s^3} \qquad (1.4.14)$$

angegeben werden kann. Bei der Berechnung der Reglerparameter ist zu berücksichtigen, daß in Gl.(1.4.8) ω_o und in Gl.(1.4.9) α_o' festzulegen ist. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß der Regelkreis für den angegebenen Bereich $d_{omin} \leq d_o \leq d_{omax}$ stabil sein muß und für den Vorfilterentwurf nach Gl.(1.3.9) B(s) nur Nullstellen in der linken s-Halbebene aufweisen sollte. B(s) ist jedoch von α_o und ω_o abhängig. Die Grenzen für die Wahl von ω_o sind für die Stellgröße

$$u_w(0) = \frac{\tilde{o}^3}{d_{oN}} \leq \hat{u}_w \qquad (1.4.14)$$

[illegible] die obere Schranke d_w gegeben. Daraus ergeben sich für Gl. (1.4.8) mit der normierten Anregelzeit $\omega_o t_{an} = 4$ und $d_w = 0.75$ die Kenngrößen $\omega_o = 1.44$ und $t_{an} = 2.8$.

Zusätzlich hierzu ist zu berücksichtigen, daß im Nennbetrieb bei $d_{oN} = 4$ die Regelgröße das vorgegebene Verhalten aufweisen soll. Dies bedeutet, daß in der Reglerübertragungsfunktion $d_o = d_{oN}$ berücksichtigt werden muß. Eine Änderung von d_o bewirkt jedoch, bezogen auf d_{oN}, die charakteristische Gleichung

$$P(s) = A(s)\, C(s) + B(s)\, D(s)$$

$$= d_{oN}\, P'(s) = d_{oN}\, [p_0' + p_1' s + p_2' s^2 + p_3' s^3 + p_4' s^4 + p_5' s^5 + s^6]$$

mit

$$p_0' = \delta_0 \frac{d_o}{d_{oN}} ,$$

$$p_1' = \delta_1 \frac{d_o}{d_{oN}} , \qquad (1.4.15)$$

$$p_2' = \delta_2 \frac{d_o}{d_{oN}} .$$

$$p_3' = (64 + 4\delta_4 - 16\delta_5)\left(1 - \frac{d_o}{d_{oN}}\right) + \frac{d_o}{d_{oN}}\, \delta_3$$

$$p_4' = \delta_4$$

$$p_5' = \delta_5 .$$

Bei einer Wahl von $q_o = 2$ in Gl. (1.4.9) ergab eine numerische Auswertung von Gl. (1.4.15), daß für alle Betriebsfälle die Stabilität gewährleistet ist. Neben der Simulation des Regelkreises bietet die Berechnung der Nullstellen, die der imaginären Achse am nächsten liegen, einen ersten Anhaltspunkt für das Einschwingverhalten. Diese Wurzeln $\lambda + j\mu$ sind für die verschiedenen Betriebspunkte gegeben durch

d_o	ξ	ω
3	-0.3	0.99
4	-0.75	1.53
5	-0.47	2.08
6	-0.275	2.35

Dies läßt erwarten, daß für $d_o = 3$ und $d_o = 6$ im Führungsfall die größten Abweichungen in Hinsicht auf Überschwingen und Anregelzeit auftreten. Das zur Vorgabe des Führungsübertragungsverhaltens notwendige Vorfilter ist leicht mit Hilfe von Gl.(1.3.9) zu bestimmen. Im vorliegenden Fall gilt

$$G_V(s) = \frac{\beta_o D(s)(s+\alpha_o')^3}{B(s)} = \frac{\beta_o(s+\alpha_o')^3}{\xi_o+\delta_1 s+\xi_2 s^2+(\xi_3-c_2(\xi_4-c_2(\xi_5-c_2)))s^3} . \tag{1.4.16}$$

Die numerische Auswertung der Gln.(1.4.10), (1.4.14) und (1.4.16) ergab die Regelkreiselemente

$$G_R(s) = \frac{5.972 + 1.787s + 2.289s^2 + 3.495s^3}{1.349s + 4.52s^2 + s^3}$$

und

$$G_V(s) = \frac{1.708 + 2.563s + 1.281s^2 + 0.2135s^3}{1.708 + 5.1136s + 6.549s^2 + s^3} .$$

Das dynamische Verhalten für die Betriebspunkte $d_o = 3,4,5$ und 6 kann mit Hilfe von Bild 1.4.2 für das Führungsverhalten und mit Bild 1.4.3 für das Störverhalten bei Störungen am Eingang der Regelstrecke beurteilt werden. Es zeigt sich, daß im Nominalfall alle Vorgaben erfüllt werden, während Parameterabweichungen nur geringe Änderungen der Stellgrößendynamik hervorrufen.

Auf den ersten Blick einfacher gestaltet sich der Entwurf, wenn für den Regelkreis sprungförmige Störungen $z(t) = s(t)$ am Ausgang der Re-

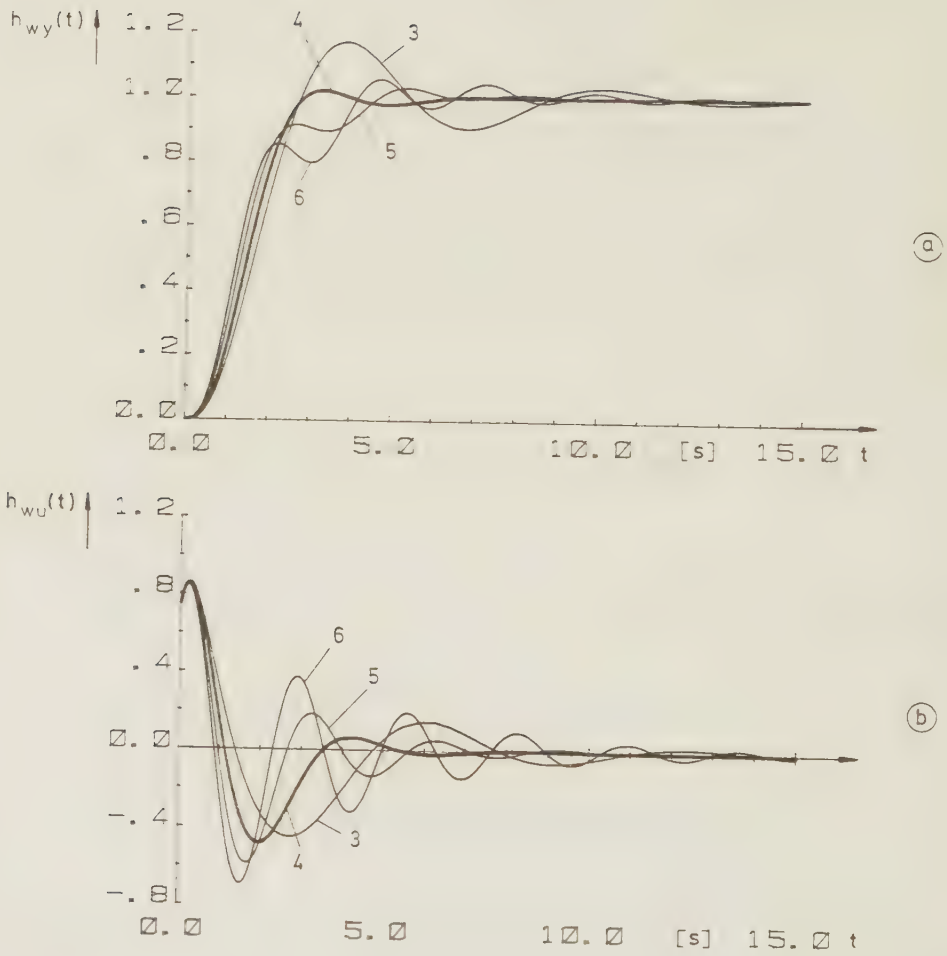


Bild 1.4.2. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises auf sprungförmige Störungen $z = s(t)$ am Eingang der Regelstrecke

(a) Regelgröße $h_{wy}(t)$

(b) Stellgröße $h_{wu}(t)$

für $w = s(t)$ und $d_o = 3, 4, 5$ und 6

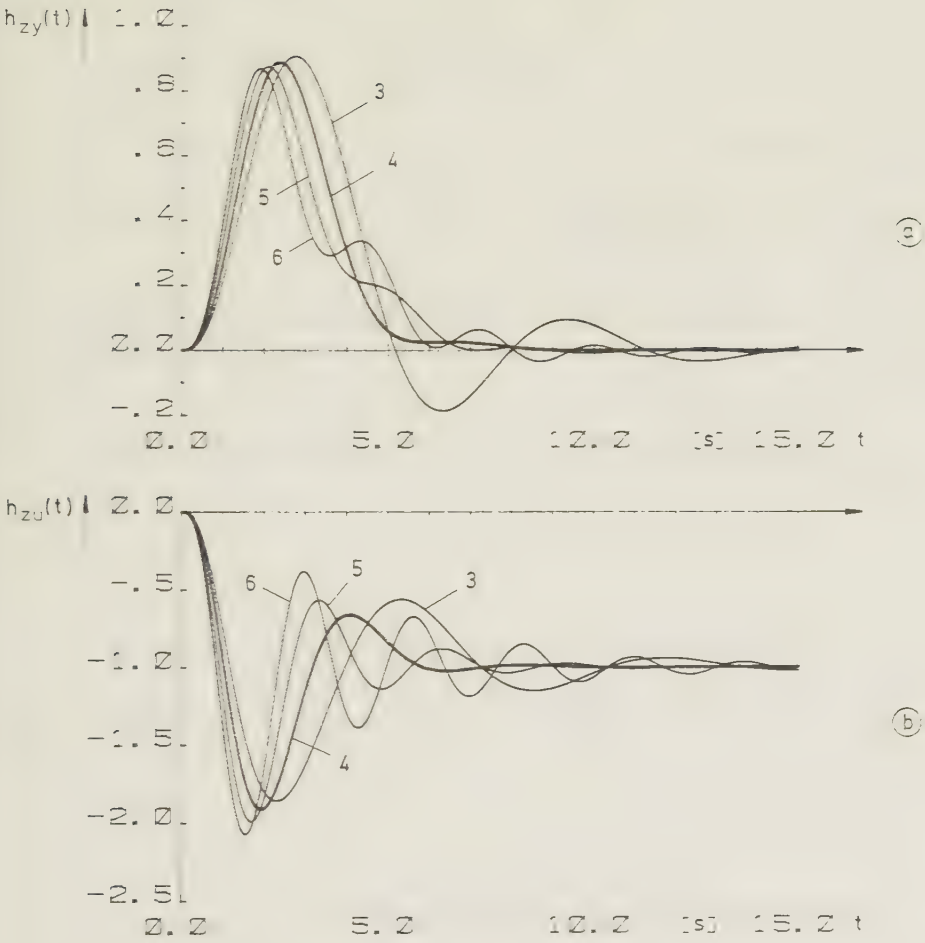


Bild 1.4.3. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises auf sprungförmige Störungen z = s(t) am Eingang der Regelstrecke
(a) Regelgröße $h_{zy}(t)$
(b) Stellgröße $h_{zu}(t)$
für z = s(t) und d_o = 3, 4, 5 und 6

gelstrecke zu berücksichtigen sind. Setzt man z. B. in Gl. (1.2.26)

$$\delta(s) = \beta(s) = \beta_o + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + s^3 \qquad (1.4.17)$$

an, so ist mit Gl.(1.2.29)

$$G_R(s) = \frac{s^2(c_2 + s)\,\beta_o}{d_o[\beta_1 s + \beta_2 s^2 + s^3]} ,$$

womit das Störverhalten bei Störungen am Eingang der Regelstrecke einen integralen Anteil erhält und der Regler somit für den Anwendungsfall unbrauchbar ist.

Die Auslegung des Regelkreises muß hier unter Anwendung von Gl. (1.2.31) mit

$$\gamma(s) = C_I(s)\ \psi(s) \qquad (1.4.18)$$

vorgenommen werden, wobei das Polynom C(s) in den stabilen Anteil $C_S(s) = s + c_2$ und in den instabilen Anteil $C_I(s) = s^2$ aufgespalten wird. Dann kann über die Ordnungsrelationen der Gln.(1.2.34) und (1.2.35) $\lambda = 3$ und $p = 5$ angesetzt werden. Zweckmäßigerweise wird mit

$$K_W(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\beta_o}{\beta_o + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + s^3}$$

das Nennerpolynom des Störverhaltens festgelegt als

$$\delta(s) = \beta(s)(s + \alpha_o')^2 = \delta_o + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + s^5 . \qquad (1.4.19)$$

Die Gln.(1.2.40) und (1.2.41) liefern für

$$\nu_1 = \delta_3$$

$$\nu_2 = \delta_4$$

und

$$\nu_3 = 1$$

die Reglerübertragungsfunktion

$$G_R(s) = \frac{(c_2 + s)(\delta_o + \delta_1 s + \delta_2 s^2)}{d_o(\delta_3 s + \delta_4 s^2 + s^3)} \qquad (1.4.20)$$

mit der Bedingung, daß das Polynom $(\delta_o + \delta_1 s + \delta_2 s^2)$ nur Nullstellen in der linken s-Halbebene enthält. Bei Störungen am Eingang der Regelstrecke lautet somit die Übertragungsfunktion

$$\frac{Y(s)}{Z_E(s)} = \frac{d_o(\delta_3 s + \delta_4 s^2 + s^3)}{(s + c_2)(\delta_o + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + s^5)} . \qquad (1.4.21)$$

Beim Vorfilterentwurf nach Gl.(1.3.3) sind die Ansätze

$$\delta(s) = \beta(s)(s + \alpha_o')^2,$$

$$C(s) = C_I(s)\, C_S(s),$$

$$\gamma(s) = C_I(s)\, \psi(s)$$

und

$$A(s) = d_o\, \psi(s)$$

zu berücksichtigen und ergeben zusammengefaßt

$$G_V(s) = \frac{\beta_o(s + \alpha_o)^2}{\delta_o + \delta_1 s + \delta_2 s^2} . \qquad (1.4.22)$$

Erfolgt die Auslegung für Störungen am Ausgang der Regelstrecke, ergeben die Gln.(1.4.20) und (1.4.21) die Regelkreiselemente

$$G_R(s) = \frac{1.194 + 3.276s + 3.834s^2 + 7.725s^3}{1.854s + 6.52s^2 + s^3}$$

und

$$G_V(s) = \frac{0.3865 + 0.3865s + 0.09663s^2}{0.3865 + 0.9637s + s^2} .$$

Die für diesen Fall interessierenden Übergangsfunktionen sind in den Bildern 1.4.4 und 1.4.5 dargestellt, wobei zusätzlich im Bild 1.4.6 das Störverhalten bei Störungen am Eingang der Regelstrecke dokumentiert ist.

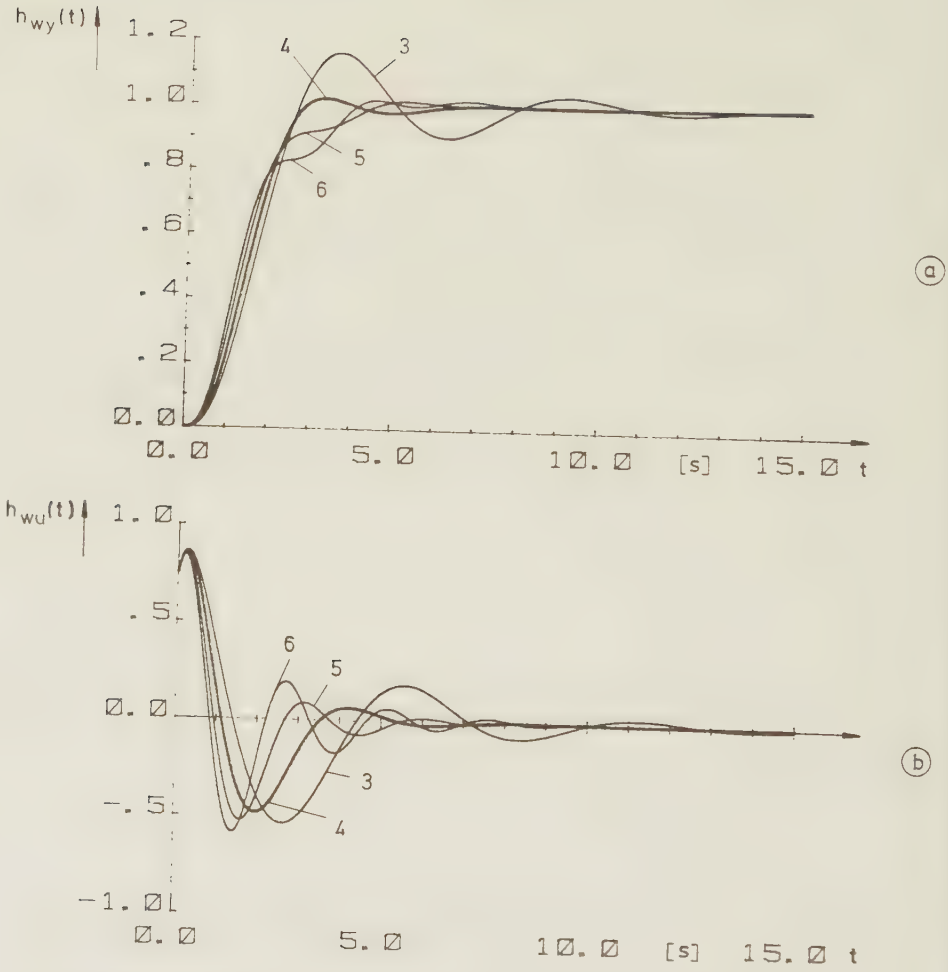


Bild 1.4.4. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises auf sprungförmige Störungen $z = s(t)$ am Ausgang der Regelstrecke

(a) Regelgröße $h_{wy}(t)$.

(b) Stellgröße $h_{wu}(t)$

für $w = s(t)$ und $d_o = 3$, 4, 5 und 6

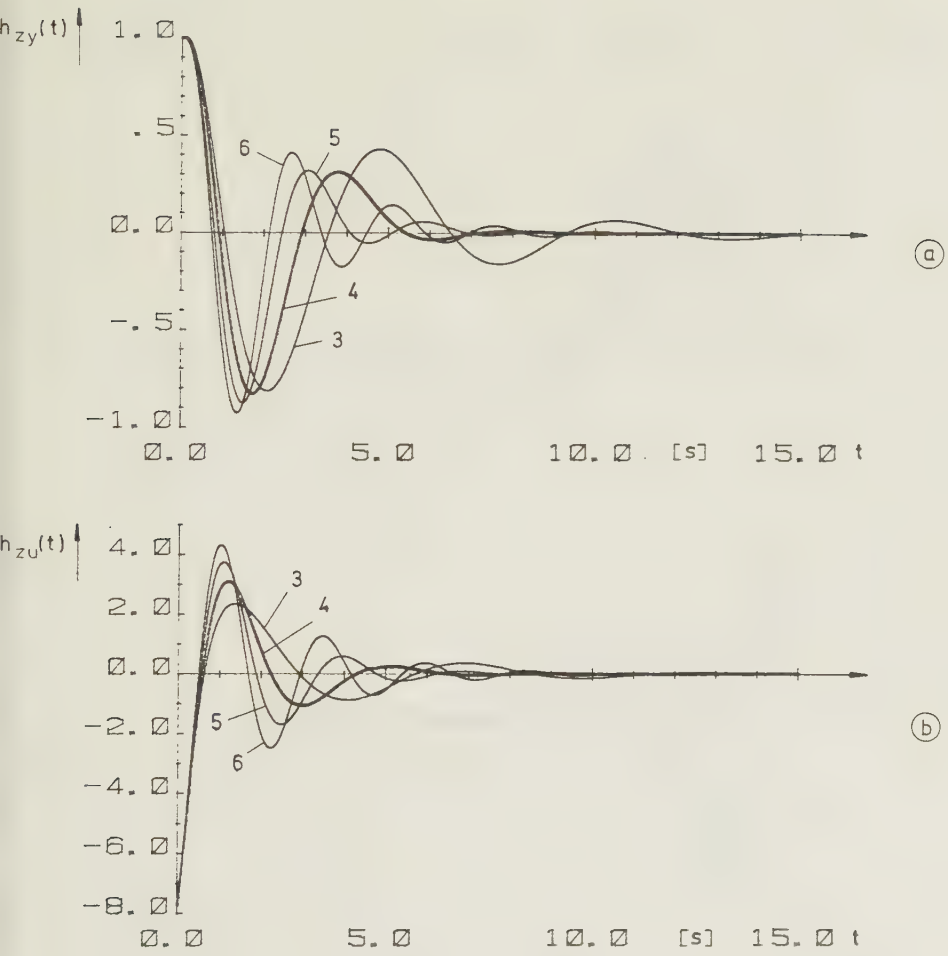


Bild 1.4.5. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises auf sprungförmige Störungen z = s(t) am Ausgang der Regelstrecke
(a) Regelgröße $h_{zy}(t)$
(b) Stellgröße $h_{zu}(t)$
für $z_A = s(t)$ und $d_o = 3$, 4, 5 und 6

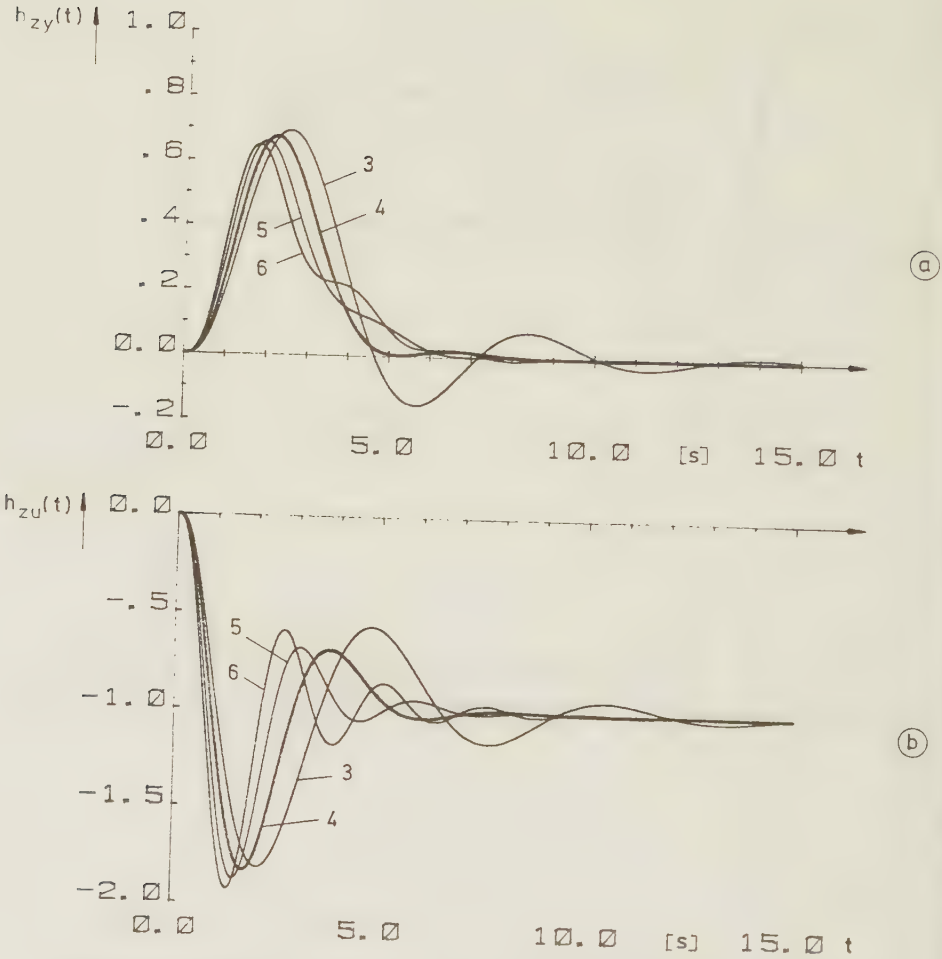


Bild 1.4.6. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises auf sprungförmige Störungen $z = s(t)$ am Ausgang der Regelstrecke

(a) Regelgröße $h_{zy}(t)$.

(b) Stellgröße $h_{zu}(t)$

für $z_E = s(t)$ und $d_o = 3$, 4, 5 und 6

Ein weiteres Beispiel soll die Anwendung der im Kapitel 1.2 vorgestellten Synthesemethode ergänzen. Als Referenzentwurf soll das in [10] vorgestellte Beispiel

$$G(s) = \frac{K_{q1}\, K_S \left(b_o + \frac{b_1}{\Omega_o} s + \frac{b_2}{\Omega_o^2} s^2 + \frac{b_3}{\Omega_o^3} s^3 + \frac{b_4}{\Omega_o^4} s^4\right)}{(1 + T_{q1} s)^2 \left(a_o + \frac{a_1}{\Omega_o} s + \frac{a_2}{\Omega_o^2} s^2 + \frac{a_3}{\Omega_o^3} s^3 + \frac{a_4}{\Omega_o^4} s^4 + \frac{a_5}{\Omega_o^5} s^5\right)} \qquad (1.4.23)$$

mit den festen Parametern

$b_o = 1$ $\qquad a_o = 1$

$b_1 = 0.22$ $\qquad a_1 = 3.02$

$b_2 = 1.12$ $\qquad a_2 = 1.25$

$b_3 = 0.0533$ $\qquad a_3 = 1.33$

$b_4 = 0.14$ $\qquad a_4 = 0.181$

$\qquad\qquad a_5 = 0.119$

und den Parameterbereichen

$$204.6 \leq K = K_{q1}\, K_S \leq 720$$

$$0.036 \leq T_{q1} \leq 0.072$$

$$1 \leq \Omega_o \leq 2.5$$

dienen. Als Nominalwerte sind die Konstanten

$$K = K_{q1}\, K_S = 204.6$$

$$T_{q1} = 0.072$$

$$\Omega_o = 1$$

festgelegt. Als Ergebnis des Reglerentwurfs ist in [10] ein Regler fünfter Ordnung und ein Vorfilter erster Ordnung angegeben, die die Bedingungen hinsichtlich der Führungsregelung erfüllen. Diese lassen sich im Zeitbereich aus den angegebenen Übergangsfunktionen so formulieren, daß für alle Betriebsfälle eine Anregelzeit von ca. 0.15 sec bei einem maximalen Stellgrößenbereich von $-0.5 \leq u_w \leq 0.55$ gefordert ist. Die maximale Überschwingweite beträgt ca. 12 %. Im Bild 1.4.7 sind die Ergebnisse dieses Entwurfs für die drei Betriebszustände

1. $T_{q1} = 0.036$

   $\Omega_o = 1$

   $K = 204.6$

2. $T_{q1} = 0.072$

   $\Omega_o = 1$

   $K = 204.6$

3. $T_{q1} = 0.072$

   $\Omega_o = 2.5$

   $K = 720$

dargestellt. Eine Analyse der Regelung, die auch das Störverhalten bei Störungen am Eingang der Regelstrecke berücksichtigt, zeigt jedoch, daß bei sprungförmigen Störungen $z(t) = s(t)$ am Eingang der Regelstrecke das Maximum der Regelgröße bei 8.0 liegt und die Ausregelzeit $t_{3\%}$ wegen des großen Unterschwingens oberhalb von 1 sec liegt (Bild 1.4.8). Unter Berücksichtigung dieses Sachverhalts wird für die in Gl.(1.4.23) angegebene Übertragungsfunktion ein Entwurf auf der Basis von Kapitel 1.2 durchgeführt, wobei sprungförmige Störungen am Eingang der Regelstrecke vorausgesetzt werden. Angesetzt wird für $n = 7$ und $m = 3$ nach Gl.(1.2.10) die Störübertragungsfunktion

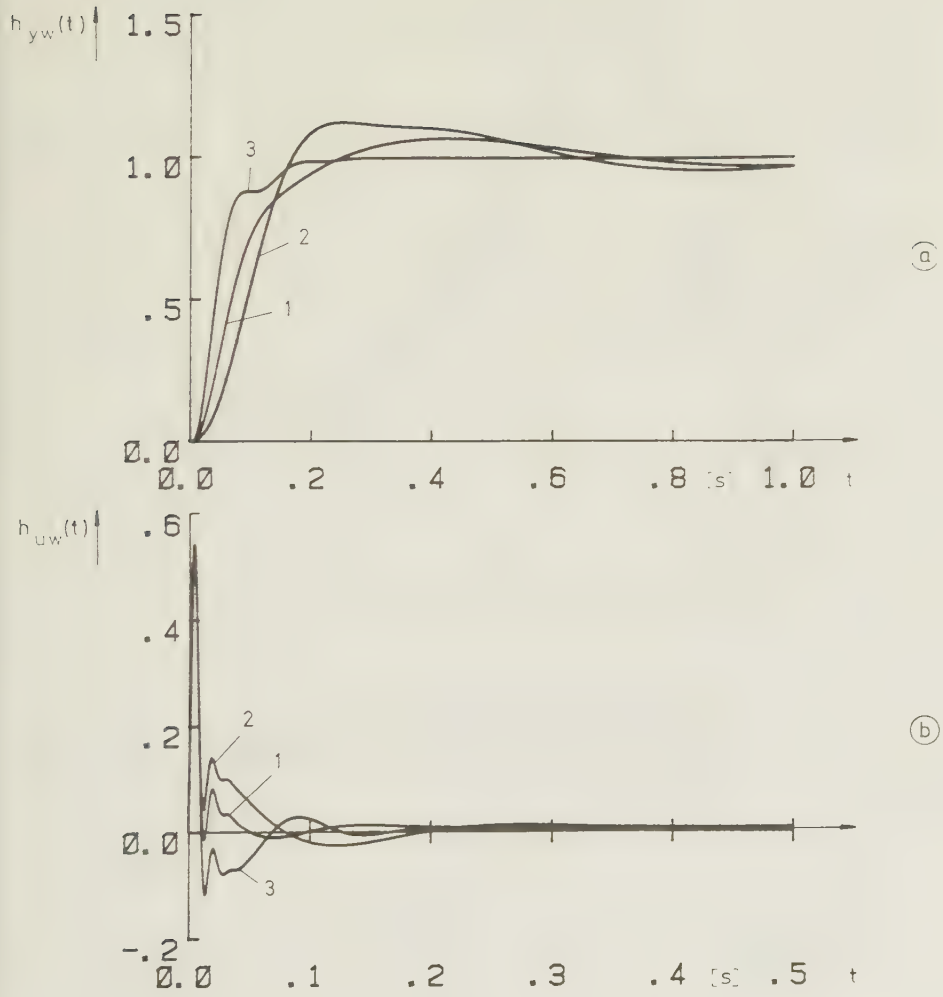


Bild 1.4.7. Übergangsfunktionen $h_{yw}(t)$ (a) und Stellgrößen $h_{uw}(t)$ (b) für den Reglerentwurf nach [10] für $w(t) = s(t)$

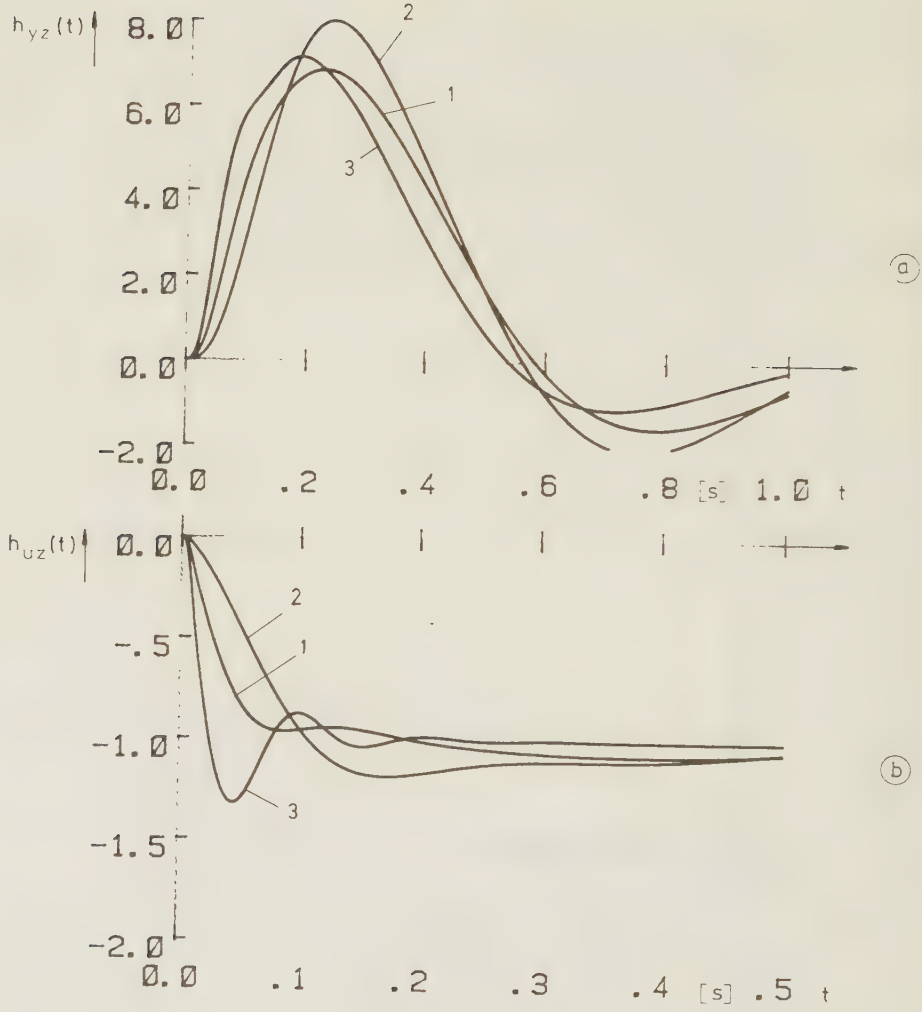


Bild 1.4.8. Übergangsfunktionen $h_{yz}(t)$, (a) und Stellgrößen $h_{uz}(t)$ (b) für den Reglerentwurf nach [10] für $z(t) = s(t)$

$$K_Z(s) = \frac{\gamma(s)}{\delta(s)} = \frac{\gamma_1 s + \gamma_2 s^2 + \gamma_3 s^3}{\delta_o + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \delta_5 s^5 + s^6}, \tag{1.4.24}$$

wobei für das Nennerpolynom ein Ansatz entsprechend [33] in der Form

$$\delta(s) = (\omega_o^2 + 2d\ \omega_o\ s + s^2)(s+\alpha)^4 \tag{1.4.25}$$

gemacht wird. Dies ergibt nach Gl.(1.2.6) die Reglerübertragungsfunktion

$$G_R(s) = \frac{D(s)\ \delta(s) - C(s)\ \gamma(s)}{D(s)\ \gamma(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}. \tag{1.4.26}$$

Wird Gl.(1.4.23) in der Form

$$G(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_o + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3 + d_4 s^4}{c_o + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + c_4 s^4 + c_5 s^5 + c_6 s^6 + s^7} \tag{1.4.27}$$

dargestellt, läßt sich Gl.(1.2.13) anwenden. Bei einer Vorgabe von $\delta(s)$ sind die Reglerparameter durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} d_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_o & 0 & 0 & 0 & 0 & c_o & 0 & 0 \\ d_2 & d_1 & d_o & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_o & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_o & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_o \\ d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_o & 0 & c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_o & c_4 & c_3 & c_2 \\ 0 & 0 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & c_5 & c_4 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & d_3 & d_2 & c_6 & c_5 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 & d_3 & 1 & c_6 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 1 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \delta_o \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \\ -\gamma_3 \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_o \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.4.28}$$

festgelegt. Unter Beibehaltung der Forderungen für das Führungsverhalten wird das Ziel der Reglersynthese hier nun so erweitert, daß für das Störverhalten eine wesentlich kleinere Amplitude der Regelgröße bei kürzerer Ausregelzeit und identischem Stellgrößenniveau gefordert wird. Um die zeitlichen Kennwerte hinsichtlich Anregelzeit und Stellgrößenverlauf sicherzustellen, werden für das Vorgabepolynom nach Gl.(1.4.25) aus den in [33] angegebenen Tabellen die Parameter

$$10 \leq \omega_o \leq 20$$

$$d = 0.8$$

$$\alpha = 100$$

ausgewählt. Mit diesen Vorgabebedingungen und den Streckenparametern

$$T_{q1} = 0.072$$

$$\Omega_o = 1 \qquad (1.4.29)$$

$$K = 720$$

kann Gl.(1.4.28) leicht ausgewertet werden. Hiermit sind durch diesen einmal festgelegten Regler die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(s) = B(s)\ A(s) + C(s)\ D(s) \qquad (1.4.30)$$

bei Variation der Streckenparameter festgelegt. Die in Tabelle 1.4.1 gezeigten Parameterkombinationen werden hierfür zugrunde gelegt.

Auf zwei interessante Fälle soll hier näher eingegangen werden. Für die in Gl.(1.4.29) angegebenen Streckendaten ergeben sich die folgenden Nullstellen und Pole.

STRECKEN-NULLSTELLEN:

REALTEIL	IMAGINÄRTEIL
-.9987512873E-01	1.0010045806
-.9987512873E-01	-1.0010045806
-.9048202683E-01	2.631634057
-.9048202683E-01	-2.631634057

STRECKEN-POLE:

REALTEIL	IMAGINÄRTEIL
-.3657645134	0.0000000000
-.3544400507	1.740403259
-.3544400507	-1.740403259
-.2231817452	2.689436006
-.2231817452	-2.689436006
-13.89392279	0.0000000000
-13.88385525	0.0000000000

	OMEGA	TW1	KONSTANT		VARIATION
204.6	2.5	0.072	K	TW1	OMEGA
204.6	2.0	0.072	K	TW1	OMEGA
204.6	1.5	0.072	K	TW1	OMEGA
204.6	1.0	0.072	K	TW1	OMEGA
204.6	1.0	0.060	K	OMEGA	TW1
204.6	1.0	0.050	K	OMEGA	TW1
204.6	1.0	0.040	K	OMEGA	TW1
204.6	1.0	0.036	K	OMEGA	TW1
30.0	1.0	0.072	OMEGA	TW1	K
40.0	1.0	0.072	OMEGA	TW1	K
50.0	1.0	0.072	OMEGA	TW1	K
60.0	1.0	0.072	OMEGA	TW1	K
72.0	1.0	0.072	OMEGA	TW1	K
204.6	1.0	0.060	OMEGA	K	TW1
204.6	1.0	0.050	OMEGA	K	TW1
204.6	1.0	0.040	OMEGA	K	TW1
204.6	1.0	0.036	OMEGA	K	TW1
204.6	2.5	0.036	TW1	K	OMEGA
204.6	2.0	0.036	TW1	K	OMEGA
204.6	1.5	0.036	TW1	K	OMEGA
204.6	1.0	0.036	TW1	K	OMEGA
300.0	2.5	0.072	TW1	OMEGA	K
400.0	2.5	0.072	TW1	OMEGA	K
500.0	2.5	0.072	TW1	OMEGA	K
600.0	2.5	0.072	TW1	OMEGA	K
720.0	2.5	0.072	TW1	OMEGA	K

Tabelle 1.4.1. Betrachtete Betriebsfälle für die Streckenparameter T_{q1}, Ω_o und K

Die numerische Auswertung von Gl.(1.4.28) für $\omega_o = 10$, $d = 0.8$ und $\alpha = 100$ liefert die Reglerkoeffizienten

REGLERKOEFFIZIENTEN:

ZAEHLER

B0	=	.43714E+[illegible]
B1	=	.12305E+06
B2	=	.51453E+06
B3	=	.12214E+06
B4	=	73393.
B5	=	12058.
B6	=	970.80
B7	=	20.311

NENNER

A0	=	0.0000
A1	=	.39342E+06
A2	=	89317.
A3	=	.44125E+06
A4	=	24067.
A5	=	55234.
A6	=	387.46
A7	=	1.0000

Regler 1

woraus sich die Nullstellen und Pole des Reglers

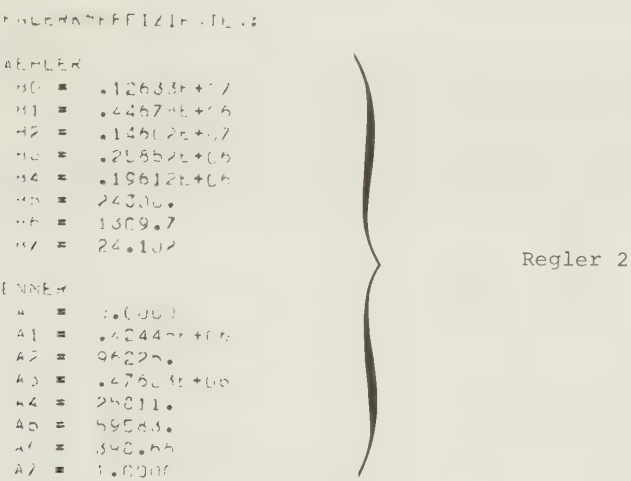
NULLSTELLEN DES REGLERS:

REALTEIL	IMAGINAERTEIL
-.9997478352E-01	1.011309200
-.9997478352E-01	-1.011309200
-.9096551236E-01	2.632262366
-.9096551236E-01	-2.632262366
-7.982557644	5.639369544
-31.44810586	0.000000000
-7.982557644	-5.639369544

POLE DES REGLERS:

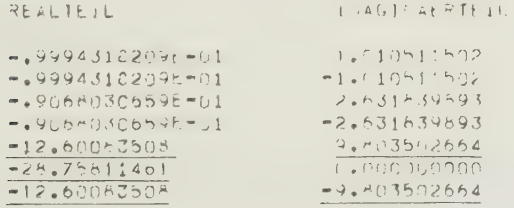
REALTEIL	IMAGINAERTEIL
0.000000000	0.000000000
-.9987513290E-01	1.010045892
-.9987513290E-01	-1.010045892
-.9048204251E-01	2.631633896
-.9048204251E-01	-2.631633896
-193.5409355	132.7438189
-193.5409355	-132.7438189

errechnen lassen. Hieraus wird deutlich, daß die Nullstellen der Regelstrecke sowohl im Nennerpolynom (Gl.(1.4.26)) als auch im Zählerpolynom in numerisch hinreichend genauer Form enthalten sind. Dies läßt eine Reduktion des Reglers auf eine Übertragungsfunktion dritter Ordnung zu. Diese Anteile sind durch Unterstreichungen gekennzeichnet. Im zweiten Fall werden die Parameter $\omega_o = 17$, $d = 0.8$ und $\alpha = 100$ zugrunde gelegt. Hieraus ergeben sich die Reglerkoeffizienten



Regler 2

und die dazugehörigen Pole und Nullstellen



POLE DES REGLERS:

REALTEIL	IMAGINAERTEIL
0.000000000	0.000000000
-.9987513059E-01	1.031045856
-.9987513059E-01	-1.031045856
-.9048205272E-01	2.631634159
-.9048205272E-01	-2.631634159
-199.1409415	140.5952045
-199.1409415	-140.5952045

wodurch wiederum eine Reduktion auf eine Übertragungsfunktion dritter Ordnung möglich ist. Hierdurch kann auch das in Gl.(1.3.4) angegebene Vorfilter in seiner Ordnung reduziert werden. Die Auswertung von Gl.(1.3.12) liefert die Übertragungsfunktion

$$G_V(s) = \frac{\omega_o^2 \alpha d_4}{b_7} \frac{(s+\alpha)^3}{B'(s)} .$$

B'(s) enthält die jeweils für Regler 1 und 2 durch Unterstreichung gekennzeichneten Nullstellen.

Auf eine eingehende Darstellung aller in Tabelle 1.4.1 dargestellten Betriebsfälle soll hier verzichtet werden. Zur Darstellung der Übergangsfunktionen werden repräsentativ die drei oben gekennzeichneten Betriebsfälle ausgewählt. So sind in den Bildern 1.4.9 und 1.4.10 die Übergangsfunktionen bei Anwendung von Regler 1 und in den Bildern 1.4.11 und 1.4.12 die Übergangsfunktionen bei Anwendung von Regler 2 dokumentiert. Beide Regler liefern bei Störungen am Eingang der Regelstrecke eine wesentlich kleinere Amplitude der Regelgröße y bei kürzerer Ausregelzeit (ca. 0.6 sec) und nahezu identischem Stellgrößenniveau als der Vergleichsentwurf aus [10]. Für das Führungsverhalten ist Regler 2 vorzuziehen, da die Anregelzeit hier im Bereich von 0.15 sec liegt. Eine wesentliche Verringerung der Stellgröße bei entsprechend größerer Anregelzeit ist hingegen nur mit Regler 1 zu erzielen.

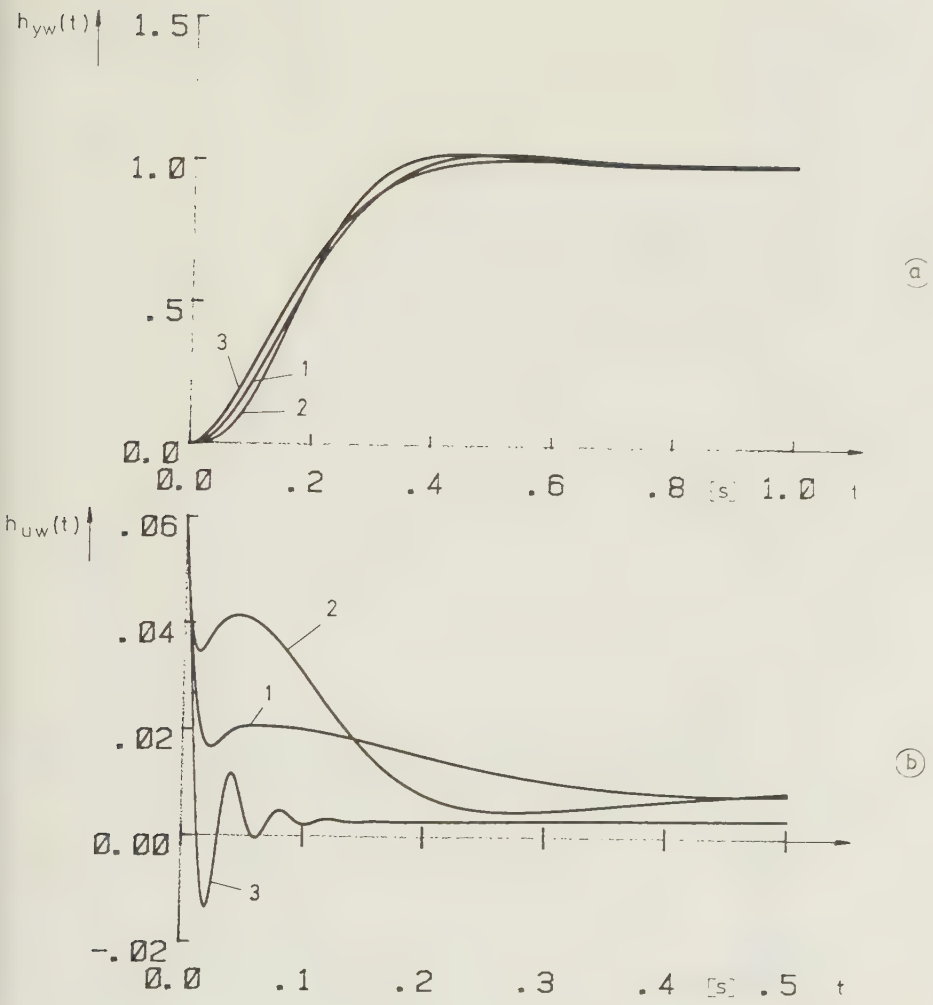


Bild 1.4.9. Übergangsfunktionen $h_{yw}(t)$ (a) und Stellgrößen $h_{uw}(t)$ (b) bei Anwendung von Regler 1 für w(t, = s

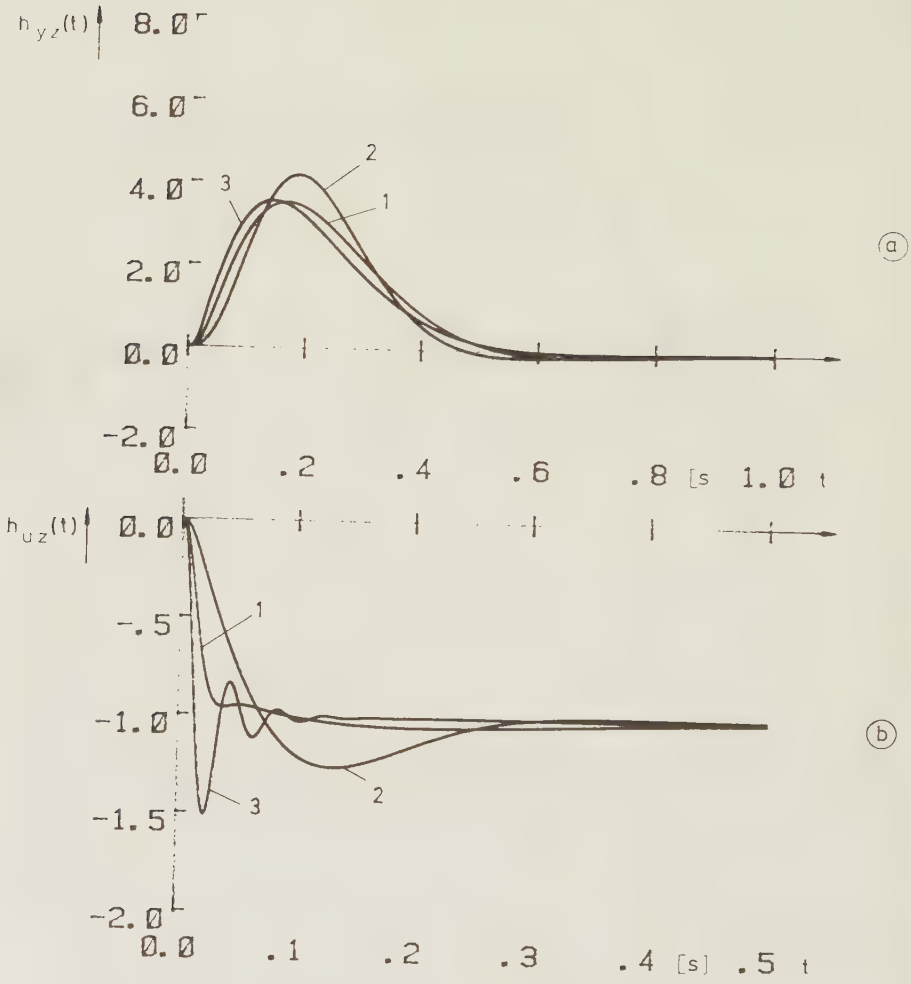


Bild 1.4.10. Übergangsfunktionen $h_{yz}(t)$ (a) und Stellgrößen $h_{uz}(t)$ (b) bei Anwendung von Regler 1 für $z(t) = s(t)$

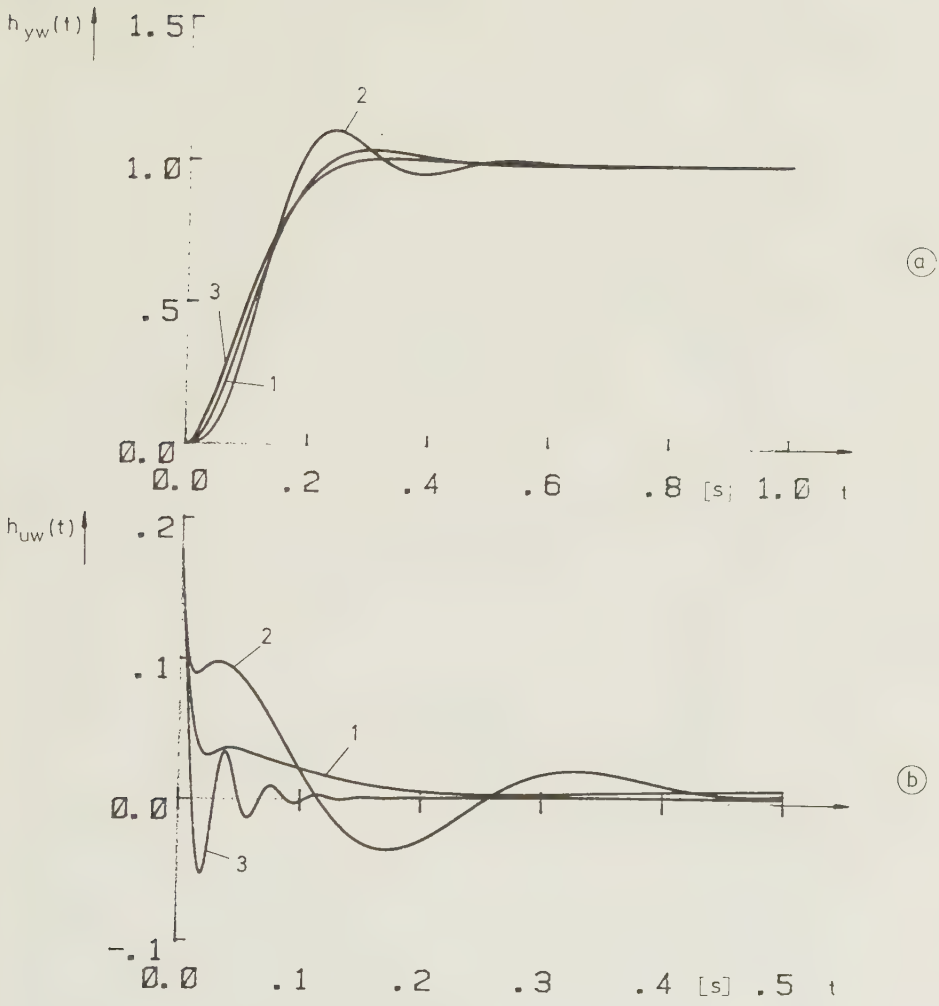


Bild 1.4.11. Übergangsfunktionen $h_{yw}(t)$ (a) und Stellgrößen $h_{uw}(t)$ (b) bei Anwendung von Regler 2 für $w(t) - s(t)$

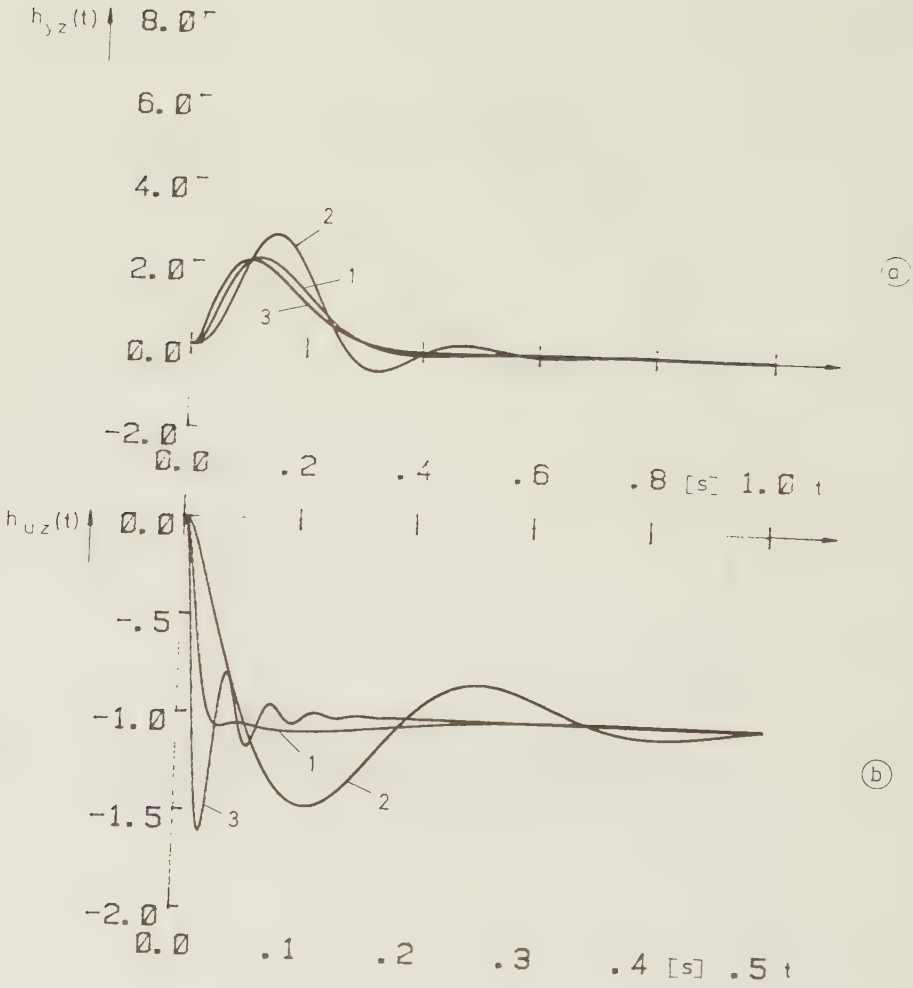


Bild 1.4.12. Übergangsfunktionen $h_{yz}(t)$ (a) und Stellgrößen $h_{uz}(t)$ (b) bei Anwendung von Regler 2 für $z(t) = s(t)$

1.5 Erweiterung des Entwurfs für Störungs- und Führungsverhalten

1.5.1 Einführung

Legt man für den Reglerentwurf z. B. die Regelkreisstruktur nach Bild 1.2.1 zugrunde, so werden hier, ausgehend vom geforderten Modellübertragungsverhalten der Führungsgrößen bzw. Störgrößen, die Regelkreiselemente Vorfilter und Regler durch die direkte Synthesemethode, d. h. durch Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme, erzeugt. Die Ergebnisse dieser Synthesemethoden sind immer Gleichungssysteme, mit Hilfe derer man die Elemente des Regelkreises, wie z. B. Vorfilter, Beobachter und Regler, direkt bestimmen kann. Ein Koeffizient irgendeines dieser Regelkreiselemente hängt dann nicht nur von den Koeffizienten der Streckenübertragungsfunktion ab, sondern auch von zusätzlichen Bedingungen wie Störverhalten, Stellverhalten usw. Verfügt man über solche Gleichungssysteme, so liegt es nahe, etwaige Parameteränderungen der Regelstrecke direkt in neue Regler- und Vorfilterparameter umzurechnen. Diese Umrechnung kann entweder algorithmisch durch Identifikation und Adaption oder "off-line" durch erneute Reglersynthese erfolgen. Schwierigkeiten treten in der Praxis aber immer dann auf, wenn das Modellübertragungsverhalten geändert werden soll. Dies tritt z. B. dann auf, wenn von schwingendem zu aperiodischem Führungsverhalten übergegangen werden soll. Diese Änderung bedingt zumeist neue Ordnungsrelationen und damit die Änderung der Synthesegleichungen. Weiterhin sind für den praktischen regelungstechnischen Einsatz dieser Konzepte folgende Gesichtspunkte zu berücksichtigen. Die Auswirkungen von Eingriffen in den Regelkreis müssen dem Benutzer transparent bleiben. Das ist in vielen Fällen bei Anwendung direkter Synthesemethoden nicht gegeben. Antworten auf die Fragen, welcher Koeffizient verändert werden muß, um z. B. Anstiegszeit, Überschwingen, Ausregelzeit von Störungen oder Empfindlichkeit zu beeinflussen, sind i. a. nur durch eingehende analytische Untersuchungen und entsprechende Simulationen zu gewinnen. Aus diesen Gründen ist es sinnvoll, den Entwurf des Regelkreises und damit dessen Struktur logisch und realisationstechnisch in mehrere Teile zu zergliedern und z. B. Stabilität, Führungsverhalten und Störungsverhalten getrennt zu betrachten.

1.5.2 Die Struktur des Regelkreises

Für die folgenden Ausführungen wird die in Bild 1.5.1 dargestellte Regelkreisstruktur betrachtet.

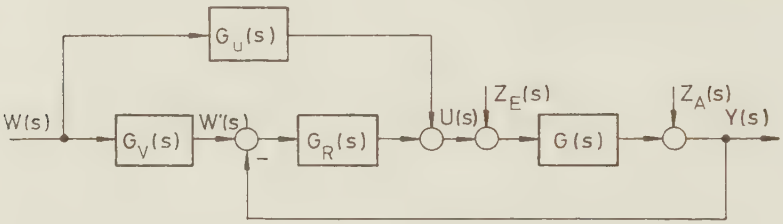


Bild 1.5.1. Regelkreisstruktur mit $G_{\ddot{u}}(s)$

Diese Struktur mit den folgenden Ansätzen geht auf P. Klubnikin zurück und ist in [7] enthalten.

Die Übertragungsfunktion der Strecke sei minimal dargestellt durch Gl.(1.2.1). Für die restlichen Übertragungsfunktionen wird definiert

$$G_V(s) \stackrel{!}{=} K'_W(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{\alpha_o + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_v s^v}{\beta_o + \beta_1 s + \ldots + s^u}, \quad u > v, \qquad (1.5.1)$$

$$G_{\ddot{u}}(s) = \frac{K'_W(s)}{H(s)} \text{ mit } H(s) = \frac{Z_H(s)}{N_H(s)}$$

und

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_o + b_1 s + \ldots + b_w s^w}{a_o + a_1 s + \ldots + s^z}. \qquad (1.5.2)$$

$K'_W(s)$ stellt die geforderte Modellübertragungsfunktion des Regelkreises dar. Anzumerken ist hier jedoch, daß der Regelkreis nicht unbedingt diese Forderung exakt erfüllen, sondern "möglichst gut" annähern soll.

Für die Regelkreissynthese werden folgende Schritte durchgeführt:

- Festlegung des charakteristischen Polynoms

$$P(s) = C(s)\ A(s) + D(s)\ B(s). \tag{1.5.3}$$

- Ermittlung der Bedingungen für die Störübertragungsfunktion

$$K_{ZE}(s) = \frac{Y(s)}{Z_E(s)} \text{ und } K_{ZA}(s) = \frac{Y(s)}{Z_A(s)}\ . \tag{1.5.4}$$

- Bestimmung der möglichen Führungsübertragungsfunktion

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = K_W(s). \tag{1.5.5}$$

- Ermittlung der Regelkreiselemente $G_V(s) = K'_W(s)$ und $H(s)$.

Die Bedingung, daß sprungförmige Störungen am Streckeneingang und am Streckenausgang asymptotisch ausgeregelt werden sollen, ist für

$$K_{ZE}(s) = \frac{A(s)\ D(s)}{P(s)} \text{ und } K_{ZA}(s) = \frac{A(s)\ C(s)}{P(s)} \tag{1.5.6}$$

durch $A(s) = s\ A'(s) = s(a'_o + a'_1 s + \ldots + s^{z'})$ gegeben.

Zur Bestimmung der jeweiligen Grade der Polynome P(s), B(s) und A(s) muß nun die jeweilige Anzahl der unbekannten Koeffizienten und die Anzahl der benötigten Gleichungen festgelegt werden. Die Zahl der unbekannten Koeffizienten und der Lösungsgleichungen ist einerseits durch den Regler $G_R(s)$ und andererseits durch das Polynom P(s) gegeben. Der Grad des Polynoms P(s) wird hier in Analogie zu Kapitel 1.2 ebenfalls als p dargestellt. Aus Gl.(1.5.3) folgt somit die Anzahl der unbekannten Parameter

$$z + 1 + w + 1 = p + 1\ . \tag{1.5.7}$$

Die Anzahl der Gleichungen ist gegeben durch den Term C(s) A(s) in Gl.(1.5.3), also $1 + 1 + z' + n$. Durch Gleichsetzen folgt daraus

$$w = n \tag{1.5.8}$$

und somit $z' = n - 1$ und $p = 2n$.

Gl.(1.5.3) kann nun entweder mit Hilfe der Wurzelortskurvenmethode oder mit Hilfe des allgemeinen Polynomansatzes ausgewertet werden. Im zweiten Fall ist es möglich, bei Vorgabe von P(s) die Reglersynthese mit Hilfe der Lösung algebraischer Gleichungen vorzunehmen. Wird P(s) in der Form

$$P(s) = p_o + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_{2n-1} s^{2n-1} + s^{2n} \qquad (1.5.9)$$

dargestellt, so läßt sich Gl.(1.5.3) in Matrizenschreibweise in folgender Form angeben:

$$\begin{bmatrix} d_o & & & 0 & & & \\ d_1 & d_o & \underline{0} & c_o & & \underline{0} & \\ \vdots & d_1 & & c_1 & & & \\ d_m & \vdots & & \vdots & & & \\ & d_m \ldots & d_o & c_{n-1} \ldots & c_o & & \\ & & d_1 \; d_o & 1 & c_1 & c_o & \\ & & \vdots \; d_1 & & \vdots & c_1 & \\ & \underline{0} & d_m \; \vdots & & c_{n-1} & \vdots & \\ & & \quad d_m & & 1 & c_{n-1} & \\ & & & & & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \\ \hline a'_o \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_o \\ p_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \\ p_{2n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \\ \underline{0} \\ \\ \vdots \\ \\ c_o \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} . \qquad (1.5.10)$$

Zusammenfassend läßt sich dieses Gleichungssystem darstellen als

$$\underline{M}\ \underline{r} = \underline{p} - \underline{m} \qquad (1.5.11)$$

und ist die Ausgangsgleichung für die noch folgende Reglersynthese. In der Darstellung nach Gl.(1.5.11) enthält die (2n x 2n)-Matrix $\underline{M}$ die Koeffizienten der Regelstrecke G(s), und zwar die Koeffizienten von D(s) in n+1 Spalten und die Koeffizienten von C(s) in n-1 Spalten. Der (2nx1)-Vektor $\underline{r}$ enthält die Reglerparameter, der (2nx1)-Vektor $\underline{p}$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms und der (2nx1)-Vektor $\underline{m}$ die Koeffizienten des Nennerpolynoms der Regelstrecke.

1.5.3 Die Auslegung des Regelkreises mit Stellgrößenaufschaltung

Das Gesamtübertragungsverhalten des Regelkreises nach Bild 1.5.1 berechnet sich zu

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = K_W(s) = \frac{G(s)\,[G_{\ddot{u}}(s) + G_R(s)\;G_V(s)]}{1 + G(s)\;G_R(s)} \,. \qquad (1.5.12)$$

Mit $G_V(s) = K'_W(s)$ und $G_{\ddot{u}}(s) = \frac{K'_W(s)}{H(s)}$ folgt aus Gl.(1.5.12)

$$K_W(s) = K'_W(s)\,\frac{\frac{G(s)}{H(s)} + G(s)\;G_R(s)}{1 + G(s)\;G_R(s)} = K_W(s)\;Q(s)\,. \qquad (1.5.13)$$

Ist $G(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = H(s) = \frac{Z_H(s)}{N_H(s)}$, so gilt nach Gl.(1.5.13) $K_W(s) = K'_W(s)$, jedoch darf hier wegen $G_{\ddot{u}}(s) = \frac{K'_W(s)}{G(s)} = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)}\,\frac{C(s)}{D(s)}$ die Regelstrecke nur Nullstellen innerhalb der linken s-Halbebene aufweisen. Ist G(s) nichtminimalphasig, so ist die Synthese mit Hilfe von

$$H(s) = G(s) \qquad (1.5.14)$$

nicht möglich. Desweiteren wird in der Praxis eine Auslegung nach Gl.(1.5.14) wegen etwaiger Parameterschwankungen oder -unsicherheiten nicht möglich sein. In diesen Fällen entspricht also das Führungsverhalten $K_W(s)$ nicht exakt dem Modellübertragungsverhalten $K'_W(s)$. Stellt man jedoch die Übertragungsfunktion Q(s) aus Gl. (1.5.13) mit Hilfe der Gl.(1.5.2) in der Form

$$Q(s) = \frac{D(s)\,[A(s)\;N_H(s) + B(s)\;Z_H(s)]}{Z_H(s)\;P(s)}$$

$$= 1 + \frac{A(s)\,[D(s)\;N_H(s) - Z_H(s)\;C(s)]}{Z_H(s)\;P(s)} = 1 + Q_\varepsilon(s) \qquad (1.5.15)$$

dar, folgt nun, daß die Führungsübertragungsfunktion gegeben ist durch

$$K_W(s) = K'_W(s)\,[1 + Q_\varepsilon(s)]\,. \qquad (1.5.16)$$

Damit das Führungsübertragungsverhalten den Anforderungen gerecht wird, kann mit Hilfe der Teilübertragungsfunktion $Q_2(s)$ im Fall von $H(s) \neq G(s)$ die Übertragungsfunktion $K_W(s)$ beeinflußt werden. Wird $Q_2(s)$ z. B. sprungfähig ausgelegt, so ist der Einfluß auf die Anregelzeit besonders stark. Im anderen Fall, $Q_2(s)$ nicht sprungfähig, wird auf Ausregelzeit und Überschwingweite stärker Einfluß genommen.

Um beide Fälle für das Übertragungsverhalten möglich zu machen, wird, ausgehend von Gl.(1.3.5), folgende Relation zugrundegelegt:

$$m + (N_H) = n + (Z_H), \tag{1.5.17}$$

wobei ( ) den Grad der Polynome angibt.

Gl.(1.5.17) zeigt, daß die Graddifferenzen von $G(s)$ und $H(s)$ identisch sind. Wird für den jeweiligen Grad der Polynome der Modellübertragungsfunktion $K'_W(s)$ nach Gl.(1.5.1) u und v festgelegt, so ergibt sich hieraus für die Realisierbarkeit des Regelkreiselementes $G_u(s)$

$$u - v \geq (N_H) - (Z_H). \tag{1.5.18}$$

Eine mögliche Auslegung für $G_u(s)$ soll hier am Beispiel der Streckenübertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{s-d}{(s-c)^2} \quad \text{mit } d > 0,\ c > 0$$

vorgenommen werden. Nach Gl.(1.5.8) ist $w = z = 2$ und $p = 4$. Nach Gl. (1.5.17) ist $(N_H) - (Z_H) = 1$, somit kann für $H(s)$ angesetzt werden

$$H(s) = \frac{h_o}{\gamma_o + s} = \frac{Z_H(s)}{N_H(s)} .$$

Für das Zählerpolynom von $Q_2(s)$ folgt daraus nach Gl.(1.5.15)

$$A(s)\ [D(s)\ N_H(s) - Z_H(s)\ C(s)]$$

$$= A(s)\ [-d\gamma_o - h_o\ c^2 + s(\gamma_o - d + 2c\ h_o) + s^2(1 - h_o)].$$

Im Fall $h_o = 1$ gilt für $Q_r(s)$ die Graddifferenz zwischen Nenner und Zählerpolynom

$$(Z_H) + 2n - [n + (Z_H) + n] = 0 .$$

Für $h_o = 1$ ist die Graddifferenz gegeben durch

$$(Z_H) + 2n - [n + (Z_H) + n-1] = 1 .$$

Das bedeutet, daß die Dynamik der Regelung durch Verändern eines Parameters, der unabhängig von Koeffizienten der Streckenübertragungsfunktion ist, wesentlich in Richtung gewünschter Eigenschaften beeinflußt werden kann. Wie das Beispiel zeigt, kann $Q_r(s)$ entweder sprungfähig oder nichtsprungfähig eingestellt werden. Durch Erhöhung der Ordnung von H(s), wobei nur die Gl.(1.5.18) berücksichtigt werden muß, stehen zusätzlich weitere Eingriffsmöglichkeiten zur Beeinflussung des Führungsübertragungsverhaltens zur Verfügung. Das Problem der Festlegung des charakteristischen Polynoms P(s) in Hinsicht auf Robustheit bezüglich "großer" Streckenparameteränderungen oder -unbestimmtheiten ist ein Teilaspekt bei der Auslegung von Regelkreisen und kann von den bisherigen Überlegungen getrennt betrachtet werden.

1.5 Reglerentwurf für Strecken mit Totzeit unter Berücksichtigung von Stör- und Führungsverhalten

Die bisher vorgestellten Entwurfsverfahren haben den Nachteil, daß sie für Regelstrecken mit Totzeit nicht geeignet sind, da hier algebraische Lösungsmethoden nicht angewendet werden können. Beim Entwurf von Regelungen für Strecken mit großen Totzeiten ist in vielen Fällen der Einsatz von Prädiktoren notwendig. Der Regelkreis enthält hierbei ein Modell, das genau der Regelstrecke entspricht [31]. Basierend auf diesen Voraussetzungen verlangt die Entwurfsmethode, daß die Totzeitanteile nicht in der charakteristischen Gleichung des Regelkreises erscheinen. Der wesentliche Nachteil dieses Verfahrens liegt jedoch darin, daß für eine Störgrößenaufschal-

die Regelstrecke asymptotisch stabil sein muß. Wie im folgenden gezeigt wird, ist mit Hilfe eines erweiterten Ansatzes der Reglerentwurf für instabile Strecken ebenfalls möglich.

1.6.1 Durchführung des Reglerentwurfes im Frequenzbereich

Der Entwurf basiert auf der Regelkreisstruktur nach Bild 1.6.1 und wird in [37] im Zeitbereich durchgeführt.

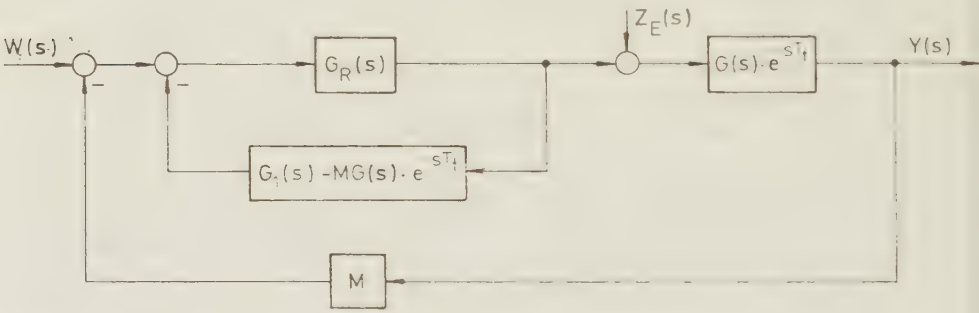


Bild 1.6.1. Regelkreisstruktur nach Watanabe und Ito

Für ein lineares, steuerbares und beobachtbares System liefert die vorgeschlagene Synthesemethode ein Modell in der Form

$$G_1(s) = \underline{c}^T e^{-\underline{A}T_t}(s\underline{I}-\underline{A})^{-1}\,\underline{b} - \int_0^{T_t} \underline{c}^T e^{-\underline{A}T_t}\,\underline{b}\,dt + G(s), \quad (1.6.1)$$

womit die Bedingung verknüpft ist, daß der Regler einen I-Anteil enthalten muß und M eine frei wählbare Konstante darstellt. Es läßt sich jedoch zeigen, daß der Entwurf durch einfache Polynomansätze *wesentlich vereinfacht* werden kann. Außerdem lassen sich zusätzliche Freiheitsgrade für die Störungs- und Führungsregelung vorsehen. Für die Ableitung des Syntheseverfahrens wird die vereinfachte Struktur nach Bild 1.6.2 betrachtet, die mit

$$G_M(s) = G_1(s) - G(s)\,e^{-sT_t} \quad (1.6.2)$$

und M = 1 dem Bild 1.6.1 entspricht.

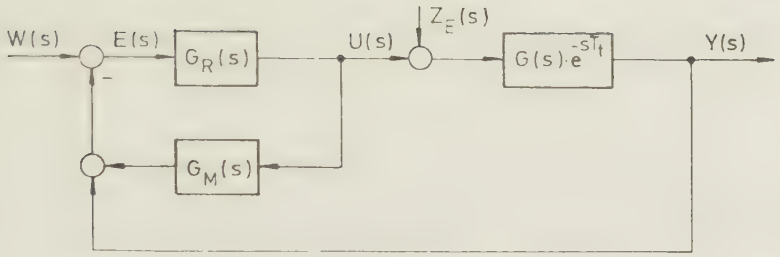


Bild 1.6.2. Vereinfachte Regelkreisstruktur

Mit $G_S(s) = G(s)\ e^{-sT_t}$ ist die Regelgröße Y(s) in Abhängigkeit der Eingangssignale W(s) und $Z_E(s)$ gegeben durch

$$Y(s) = \frac{G_S(s)\ G_R(s)}{1 + G_R(s)\,(G_M(s) + G_S(s))}\ W(s) + \frac{G_S(s)\,(1 + G_R(s)\ G_M(s))}{1 + G_R(s)\,(G_M(s) + G_S(s))}\ Z_E(s)$$

$$= G_W(s)\ W(s) + G_{ZE}(s)\ Z_E(s) \qquad (1.6.3)$$

$$= G_W(s)\ W(s) + G_S(s)\ (1 - G_W(s))\ Z_E(s)\ .$$

Mit Hilfe der Modellübertragungsfunktion $G_M(s)$ nach Gl.(1.6.2) ist die charakteristische Gleichung

$$P_c(s) = 1 + G_R(s)\ (G_M(s) + G_S(s)) = 1 + G_R(s)\ G_1(s) = 0 \qquad (1.6.4)$$

unabhängig von $G_S(s)$ und damit von der Totzeit T_t. Für den Entwurf des Reglers ergibt sich hiermit die Bedingung, daß die Nullstellen des Polynoms $P_c(s)$ in der linken s-Halbebene liegen müssen. Als weitere (triviale) Bedingung muß für sprungförmige Führungsgrößen W(s) die Bedingung

$$\lim_{s \to 0} G_W(s) = 1 \qquad (1.6.5)$$

erfüllt sein. Um hieraus Bedingungen für die Regelkreiselemente abzuleiten, werden die Übertragungsfunktionen geschrieben als

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)},\ G_S(s) = G(s)\ e^{-sT_t} = \frac{D(s)}{C(s)}\ e^{-sT_t} \text{ und } G_1(s) = \frac{Z_1(s)}{N_1(s)},$$

(1.6.6)

wobei vorausgesetzt wird, daß $G/s. = \frac{D(s)}{C(s)}$ minimal dargestellt ist. Da für die Reglerübertragungsfunktion ein I-Anteil vorgesehen ist, wird definiert $A(s) = sA'(s)$. Zusätzlich zu dieser Bedingung muß wegen

$$G_W(s) = \frac{N_1(s)\ B(s)\ D(s)}{C(s)(A(s)\ N_1(s) + B(s)\ Z_1(s))}\ e^{-sT_t} \qquad (1.6.7)$$

gefordert werden

$$N_1(s) = C(s). \qquad (1.6.8)$$

Somit kann Gl.(1.6.5) geschrieben werden als

$$\lim_{s\to 0} \frac{B(s)\ D(s)}{sA'(s)\ N_1(s) + B(s)\ Z_1(s)}\ e^{-sT_t} = \lim_{s\to 0} \frac{D(s)}{Z_1(s)} = 1. \qquad (1.6.9)$$

Für das Störverhalten muß unter Berücksichtigung der Gln.(1.6.5), (1.6.8) und (1.6.9) gelten

$$\lim_{s\to 0} G_{ZE}(s) = \lim_{s\to 0} G_M(s) = \lim_{s\to 0} \frac{Z_1(s) - D(s)\ e^{-sT_t}}{N_1(s)} = 0. \qquad (1.6.10)$$

Dies ist nur dann möglich, wenn die n Nullstellen s_i von

$$N_1(s) = C(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - s_i) \qquad (1.6.11)$$

die Bedingung

$$Z_1(s_i) - D(s_i)\ e^{-s_i T_t} = 0 \quad \text{für } s_i \neq 0 \qquad (1.6.12)$$

erfüllen. Daraus folgt, daß $Z_1(s)$ ebenfalls ein Polynom n-ten Grades ist. Zur Bestimmung von $G_1(s)$ sind also die Gln.(1.6.8) bis (1.6.12) anzuwenden. Für

$$G(s) = \frac{d_o + d_1 s + \ldots + d_m s^m}{\prod_{i=1}^{n} (s - s_i)} e^{-sT_t} \quad \text{mit } m < n$$

kann dies durch den Ansatz

$$G_1(s) = \frac{Z_1(s)}{N_1(s)} = \frac{z_o + z_1 s + \ldots + z_n s^n}{C(s)} \tag{1.6.13}$$

erfüllt werden. Für den Entwurf des Reglers $G_2(s)$ sind hier im Prinzip die identischen Ordnungsrelationen wie in Kapitel 1.5.2 anwendbar. Demnach wird ein integraler Regler mit gleicher Ordnung von Zählerpolynom B(s) und Nennerpolynom A(s) angesetzt. Zu berücksichtigen ist hier jedoch, daß $G_w(s)$ infolge von Gl. 1.6.13 sprungfähig werden kann. Zur Vermeidung algebraischer Schleifen für den inneren Regelkreis bei digitaler Realisierung wird die Nennerordnung des Reglers um 1 erhöht. A(s) besitzt also den Grad n+1, während B(s) den Grad n hat.

1.6.2 Anwendung des Verfahrens

Die Reglersynthese soll an dem Modell eines Transportsystems vorgenommen werden. Dieses Modell entsteht dadurch, daß Material über eine Schüttelrinne in einen Silo transportiert wird und dort zwischengespeichert wird. Die Regelgröße ist der Füllstand des Silos. Die Totzeit entsteht durch die Transportdauer der Schüttelrinne. Die Modellbildung wurde in [9] vorgenommen und ergab die Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{y(s)}{C(s)} e^{-sT_t} = \frac{0.5}{s(1+s)} e^{-2s}.$$

Gl.(1.6.13) liefert den Ansatz

$$G_1(s) = \frac{Z_1(s)}{C(s)} = \frac{z_o + z_1 s + z_2 s^2}{s(1+s)}.$$

Zur Bestimmung des Absolutkoeffizienten erhält man mit Gl.(1.6.9) die Lösung $z_0 = d_0 = 0.5$. Für das Störverhalten ist nach Gl.(1.6.10) zu [illegible]

$$\lim_{s \to 0} \frac{[illegible] \; e^{-sT_t}}{N_{?}(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{z_0 - d_0 e^{-sT_t}}{s(1+s)} + \lim_{s \to 0} \frac{z_1 + z_2 s}{1+s}$$

$= z_1 + d_0$ [illegible]

womit $z_1 = -1$ ist. Die Auswertung von Gl.(1.6.12) ergibt

$$z_0 + z_1 s_i + z_2 s_i^2 - d_0 e^{-s_i T_t} = 0 \quad \text{für } s_i = -1$$

[illegible] als Zwischenergebnis

$$G_w(s) = \frac{0.5 - s + 2.1945 \; s^2}{s(s+1)} - \frac{0.5}{s(s+1)} e^{-2s} .$$

Die Berechnung des Reglers

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 \; s^2}{s(a_0 + a_1 s + s^2)}$$

erfolgt mit Hilfe von Gl.(1.6.4) und liefert für eine Polvorgabe von

$$P_c(s) = (s+0.3)^2 \; (s+0.4)^2 \; (s+1)$$

$$= p_0 + p_1 s + p_2 \; s^2 + p_3 \; s^3 + p_4 \; s^4 + s^5$$

das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} [illegible] & & & & \\ z_1 & z_0 & 0 & 0 & 0 \\ z_2 & z_1 & z_0 & 1 & 0 \\ 0 & z_2 & z_1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [illegible] \\ b_1 \\ b_2 \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [illegible] \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [illegible] \\ 0.1824 \\ 0.898 \\ 2.13 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

mit dem Lösungsvektor

$$[b_o,\ b_1,\ b_2,\ a_o,\ a_1] = [0.0288,\ 0.4224,\ 0.3936,\ 1.0604,\ 0.5362].$$

Bei der simulativen Untersuchung des Regelverhaltens stand im Vordergrund, nicht nur die Ergebnisse der Regelung bei nominellen Strekkenparametern zu untersuchen, da, vom Versuchsaufbau abhängig, Variationen aller Streckenparameter auftreten können. Nach [9] gelten für

$$G(s) = \frac{K}{s(1+sT)}\, e^{-sT_t}$$

die Nominalwerte

$$K = K_N = 0.5; \quad T = T_N = 1; \quad T_t = T_{tN} = 2$$

und die Parametergrenzen

$$K = 0.4, \ldots, 0.6$$

$$T = 0.5, \ldots, 1.5$$

$$T_t = 1.8, \ldots, 2.4\ .$$

Die in den Bildern 1.6.3 bis 1.6.8 dargestellten Übergangsfunktionen zeigen anschaulich, daß bei allen Parameteränderungen sowohl für das Führungs- als auch für das Störungsverhalten keine wesentlichen Abweichungen in Hinsicht auf Anregelzeit und Ausregelzeit bei nahezu gleichem Stelldynamikbereich auftreten. Wird das Verfahren in dieser Form angewendet, ist das Hauptanwendungsgebiet sicherlich die Störungsregelung.

Zur Verbesserung des Führungsverhaltens, das im vorliegenden Fall bei $T = T_{max}$, $K = K_{max}$ und $T_t = T_{tmax}$ ein maximales Überschwingen von 50 % zeigt, ist der Einbau eines Vorfilters notwendig. Womit, unter Berücksichtigung von Realisierbarkeitsbedingungen, sichergestellt werden kann, daß das "langsamste" konjugiert komplexe Polpaar kompensiert wird. Hierbei tritt jedoch der Nachteil auf, daß bei kleinerem Stellgrößenniveau die Anregelzeit vergrößert wird.

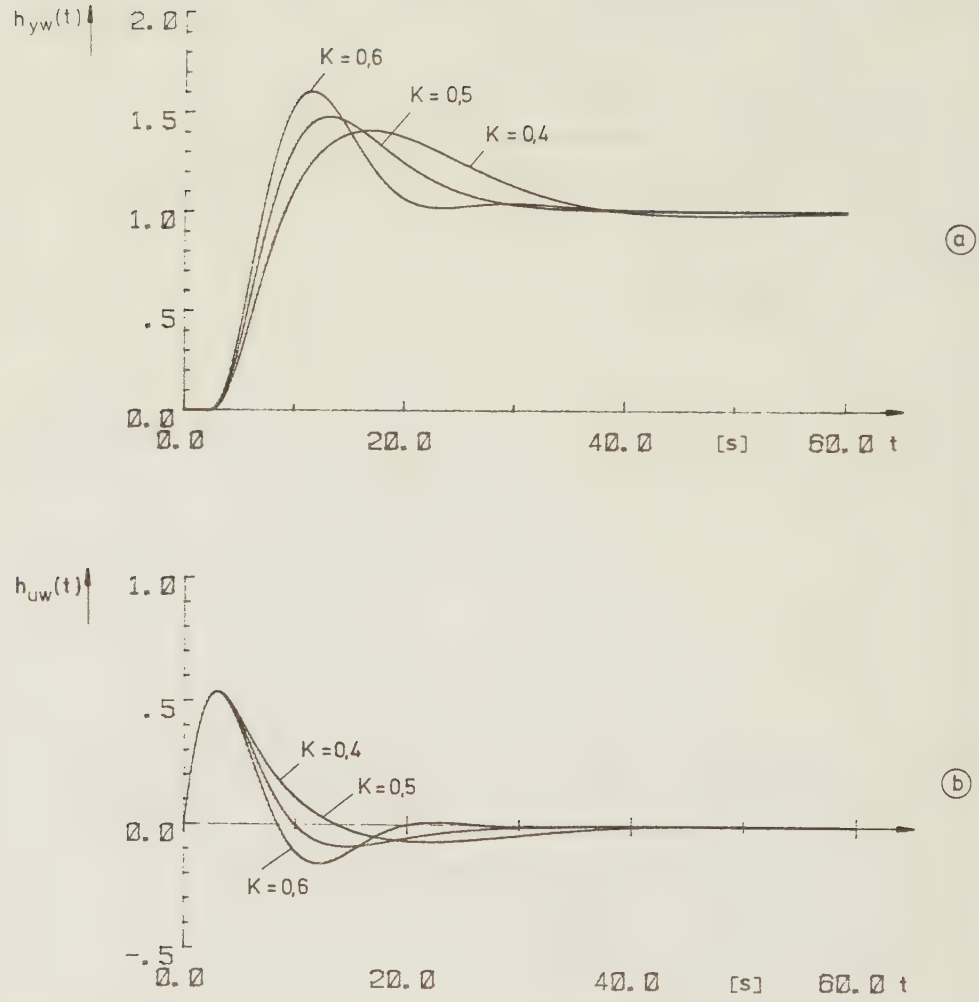


Bild 1.6.3. Übergangsfunktionen
(a) der Regelgröße $h_{yw}(t)$
(b) der Stellgröße $h_{uw}(t)$
für $w(t) = s(t)$; $K = 0.4, 0.5, 0.6$; $T = 1$; $T_t = 2$

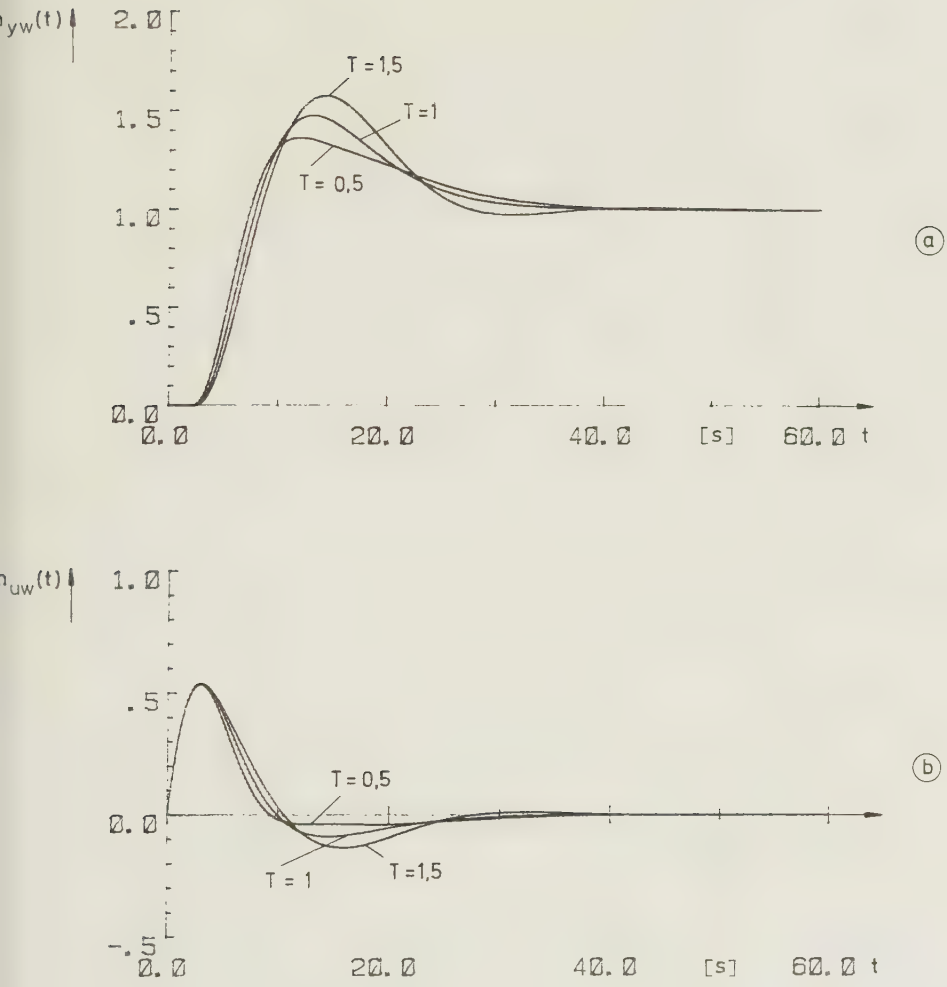


Bild 1.6.4. Übergangsfunktionen
(a) der Regelgröße $h_{yw}(t)$
(b) der Stellgröße $h_{uw}(t)$
für $w(t) = s(t)$; $K = 0.5$; $T = 0.5,\ 1,\ 1.5$; $T_t = 2$

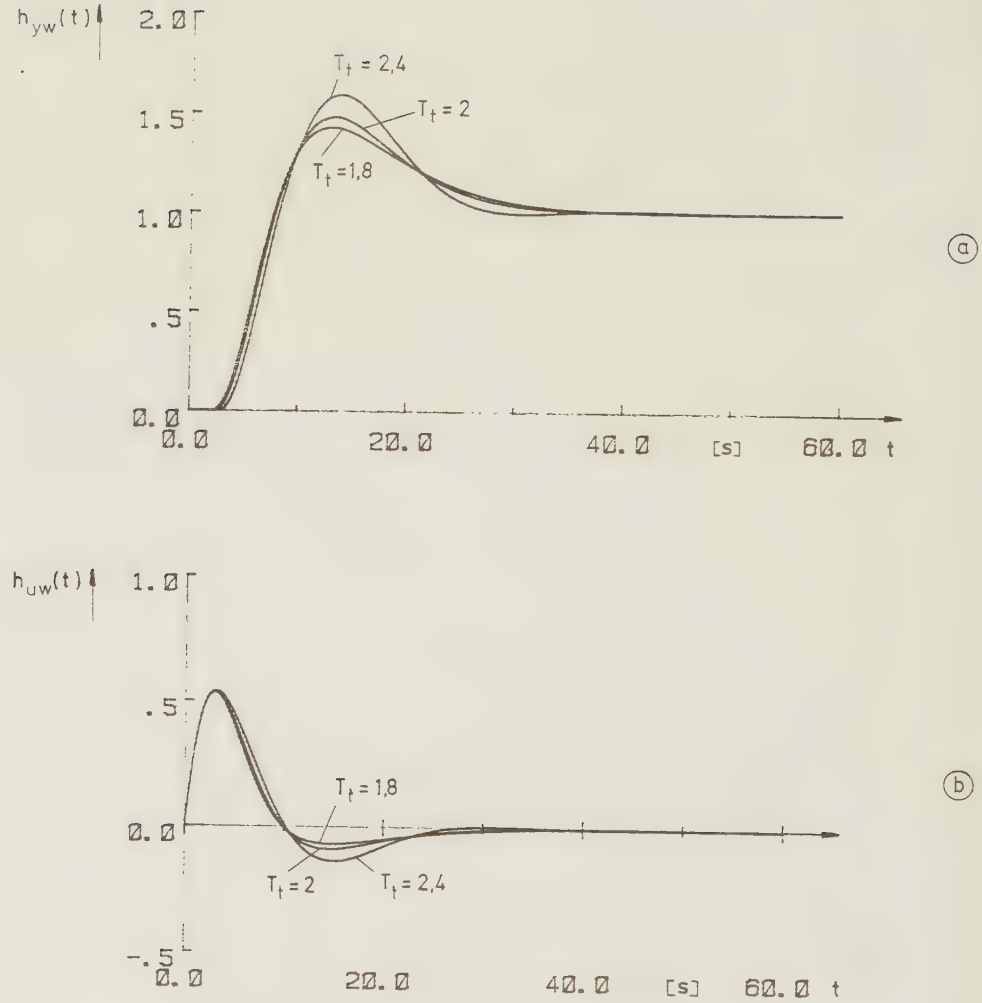
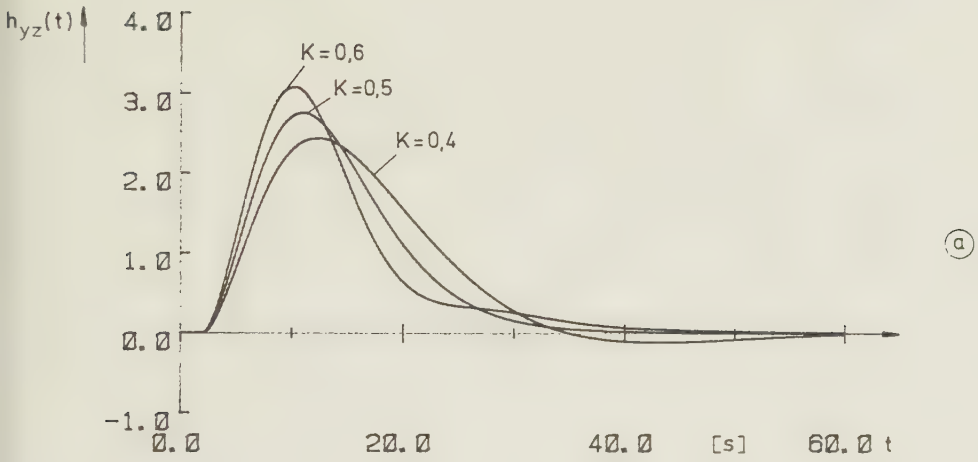


Bild 1.6.5. Übergangsfunktionen
(a) der Regelgröße $h_{yw}(t)$
(b) der Stellgröße $h_{uw}(t)$
für $w(t) = s(t)$; $K = 0.5$; $T = 1$; $T_t = 1.8,\ 2.0,\ 2.4$



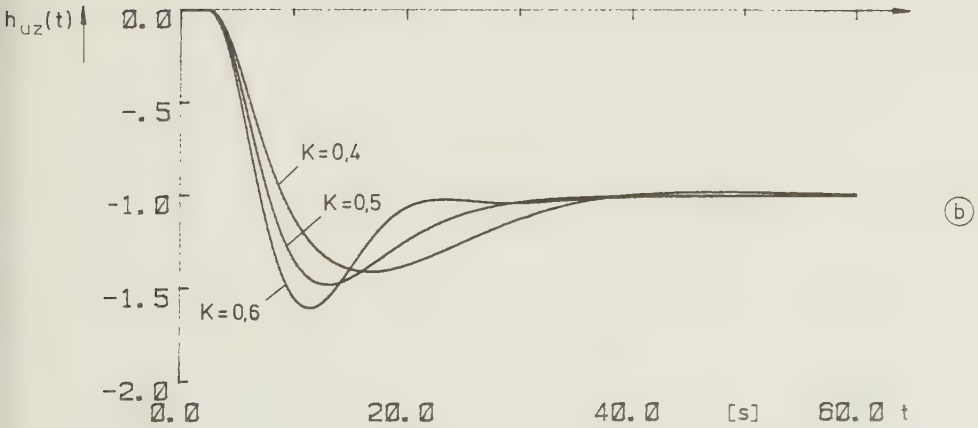


Bild 1.6.6. Übergangsfunktionen
(a) der Regelgröße $h_{yz}(t)$
(b) der Stellgröße $h_{uz}(t)$
für $z_E(t) = s(t)$; K = 0.4, 0.5, 0.6; T = 1; $T_t = 2$

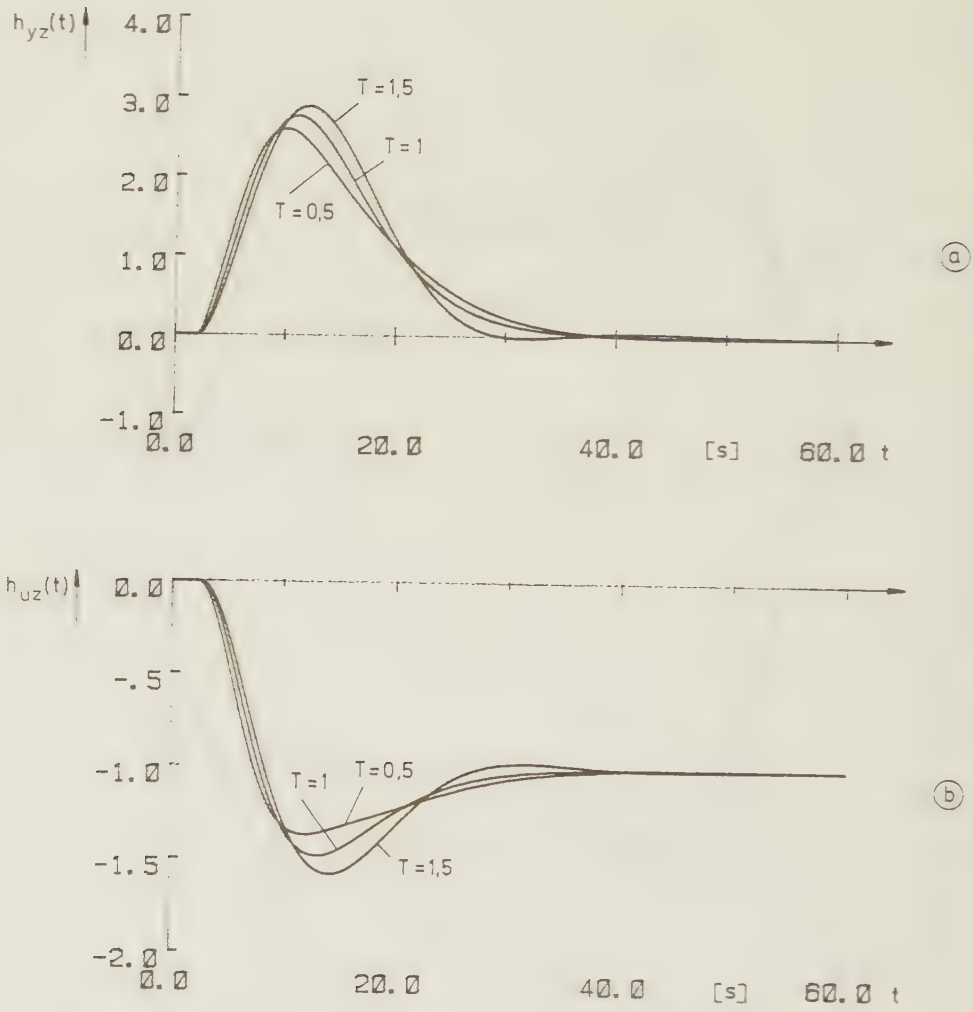


Bild 1.6.7. Übergangsfunktionen
(a) der Regelgröße $h_{yz}(t)$
(b) der Stellgröße $h_{uz}(t)$
für $z_E(t) = s(t)$; $K = 0.5,\ 1.0,\ 1.5$; $T_t = 2$

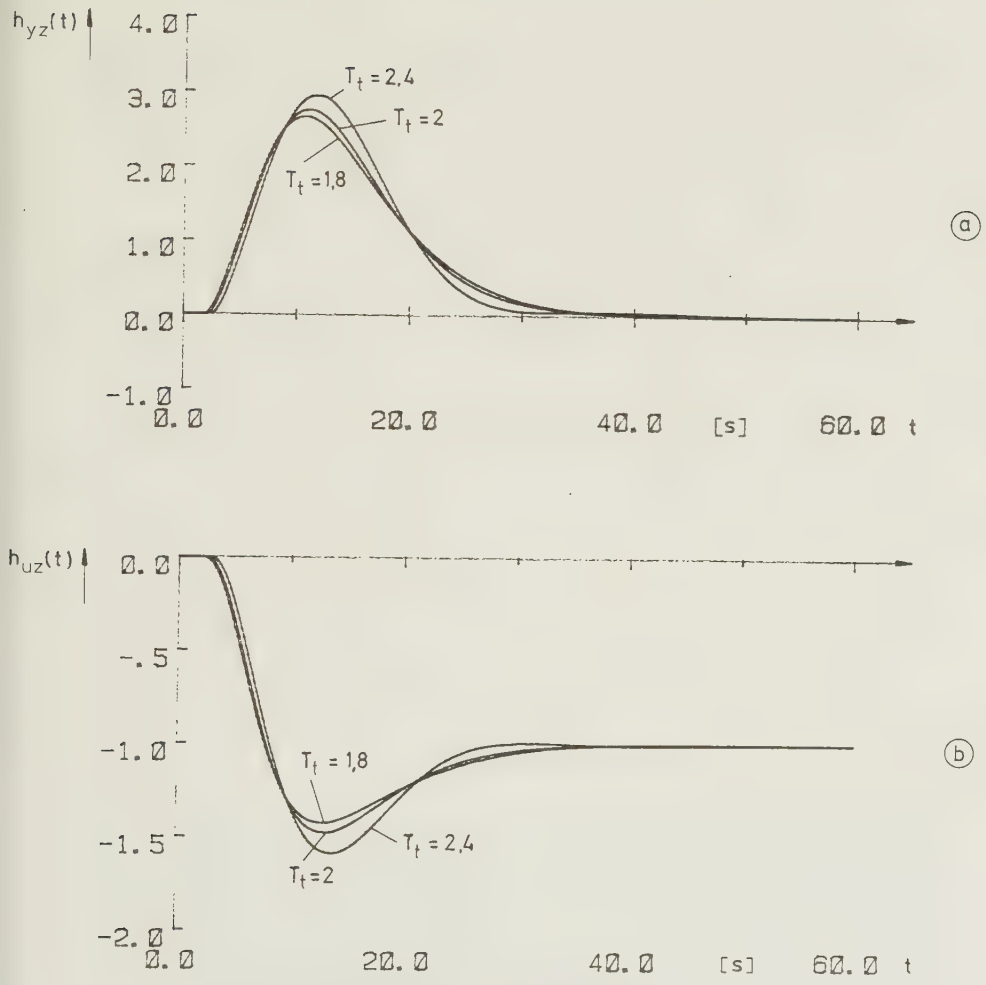


Bild 1.6.8. Übergangsfunktionen
(a) der Regelgröße $h_{yz}(t)$
(b) der Stellgröße $h_{uz}(t)$
für $z_E(t) = s(t)$; $K = 0.5$; $T = 1$; $T_t = 1.8,\ 2.0,\ 2.4$

1.6.3 Entwurf diskreter Regelungen für Regelstrecken mit Totzeit unter Berücksichtigung von Störungs- und Führungsverhalten

Ausgehend von der Regelkreisstruktur im Bild 1.6.9 wird der allgemeine Fall einer sprungförmigen Regelstrecke mit Totzeit

$$G(z) = \frac{D(z)}{C(z)} z^{-d} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + \ldots + d_n z^{-n}}{c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_n z^{-n}} z^{-d}$$

betrachtet, der im Fall nichtsprungfähiger Regelstrecken

$$G(z) = \frac{d_\nu z^{-\nu} - \ldots - d_n z^{-n}}{C(z)} z^{-d} \qquad (1.6.14)$$

$$= \frac{d_\nu + \ldots - d_n z^{-n+\nu}}{C(z)} z^{-d'}$$

für $\nu = 0$ und der Ersatztotzeit $d' = \nu - d$ enthalten ist.

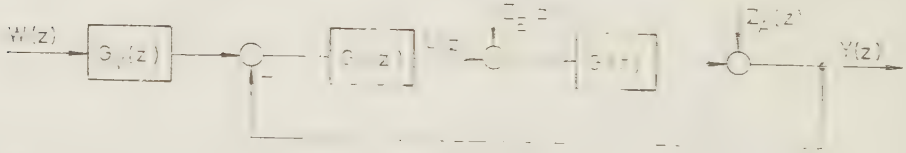


Bild 1.6.9. Struktur des Regelkreises

Der Schwerpunkt der Reglersynthese liegt hier wiederum darin, Forderungen an das Störverhalten zu realisieren. Das wesentliche Ziel der weiteren Ausführungen ist es jedoch, Synthesebedingungen in algebraischer Form zu formulieren, die mit Hilfe einfacher Rechenschemata zu algorithmieren sind. Dies soll exemplarisch am Beispiel eines Entwurfs für endliche Einstellzeit gezeigt werden. Für die Störübertragungsfunktion

$$\frac{Y(z)}{Z_E(z)} = \frac{G(z)}{1 + G_p G(z)} = K_{ZE}(z) \qquad (1.6.15)$$

ist deshalb

$$K_{ZE}(z) = \sum_{i=o}^{m} k_{zi}\, z^{-i} \tag{1.6.16}$$

als endliches Polynom des Grades m anzusetzen und zu fordern, daß $\lim_{z\to 1} K_{ZE}(z) = 0$, also

$$K_{ZE}(z) = (1-z^{-1})\, K'_Z(z) \tag{1.6.17}$$

mit dem frei wählbaren Polynom $K'_Z(z)$, erfüllt ist. Für die Übertragungsfunktion

$$\frac{U(z)}{Z_E(z)} = \frac{K_{ZE}(z)}{G(z)} - 1 \tag{1.6.18}$$

ist unter Berücksichtigung von Gl.(1.6.14) und (1.6.17) zur Verbesserung des Stellverhaltens [34] ebenfalls ein Polynom endlichen Grades anzusetzen. Dies geschieht mit Hilfe des frei wählbaren Polynoms

$$K'_Z(z) = K''_Z(z)\, D(z)\, z^{-d'}, \tag{1.6.19}$$

wobei $K''_Z(z)$ jetzt die noch festzulegenden Anteile enthält. Gl. (1.6.18) läßt sich somit schreiben als

$$\frac{U(z)}{Z_E(z)} = (1-z^{-1})\, K''_Z(z)\, C(z) - 1\,. \tag{1.6.20}$$

Bei Störungen am Ausgang der Regelstrecke ist mit diesem Ansatz

$$\frac{U(z)}{Z_A(z)} = \frac{1}{G(z)}\left(\frac{K_{ZE}(z)}{G(z)} - 1\right) \tag{1.6.21}$$

somit keine endliche Einstellzeit zu erreichen. Dieser Fall wird im weiteren getrennt betrachtet. Als Zwischenergebnis erhält man aus den Gln.(1.6.15), (1.6.17) und (1.6.19) die Übertragungsfunktion des Reglers

$$G_R(z) = \frac{1 - (1-z^{-1})\ C(z)\ K_Z''(z)}{(1-z^{-1})\ K_Z''(z)\ D(z)\ z^{-d'}}. \qquad (1.6.22)$$

Damit diese Übertragungsfunktion realisierbar ist, müssen im Zähler genau d'-Koeffizienten niedrigen Grades verschwinden. Enthält D(z) Nullstellen $D_i(z)$ außerhalb und auf dem Einheitskreis und $D_S(z)$ im Einheitskreis, so würden die Reglerpole gegen die Streckennullstellen gekürzt, was bei etwaigen Unbestimmtheiten der Streckenübertragungsfunktion zur Instabilität des Regelkreises führen würde. Deshalb wird für Gl.(1.6.21) der Ansatz

$$1-(1-z^{-1})\ C(z)\ K_Z''(z) = H_o(z)\ D_i(z)\ z^{-d'} \qquad (1.6.23)$$

gemacht. Mit Gl.(1.6.20) folgt für die Stellgröße bei Störungen am Eingang der Regelstrecke

$$\frac{U(z)}{Z_E(z)} = -\ H_o(z)\ D_i(z)\ z^{-d'}. \qquad (1.6.24)$$

Für ein Störsignal am Ausgang der Regelstrecke ist zwar

$$\frac{Y(z)}{Z_A(z)} = (1-z^{-1})\ C(z)\ K_Z''(z) = K_{ZA}(z) \qquad (1.6.25)$$

ein endliches Polynom in z^{-1}, jedoch gilt für die entsprechende Stellgröße

$$\frac{U(z)}{Z_A(z)} = -\ \frac{C(z)\ H_o(z)}{D_S(z)}\ . \qquad (1.6.26)$$

Das bedeutet, daß trotz stationärer Regelgröße Y(z) Stellbewegungen auftreten. Eine Modifikation von Gl.(1.6.23) in Form von

$$H_o(z) = D_S(z)\ H_o'(z) \qquad (1.6.27)$$

läßt das Nennerpolynom in Gl.(1.6.26) verschwinden und erzeugt so ebenfalls für den Fall der Störungen am Ausgang der Regelstrecke eine endliche Einstellzeit für die Stellgröße.

Um weitere Bedingungen für die Gln.(1.6.22) und (1.6.23) zu ermitteln, wird in einem weiteren Schritt das Verhalten der Regelgröße

bei sprungförmigen Führungssignalen untersucht. Die Führungsübertragungsfunktion lautet

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = G_V(z)\ \left(1 - \frac{K_{ZE}(z)}{G(z)}\right) = K_W(z), \tag{1.6.28}$$

womit $G_V(z)$ bei Vorgabe von $K_{ZE}(z)$ und $K_W(z)$ durch

$$G_V(z) = \frac{G(z)\ K_W(z)}{G(z) - K_{ZE}(z)} \tag{1.6.29}$$

festgelegt ist. Die Stellgröße ist gegeben durch

$$\frac{U(z)}{W(z)} = \frac{K_W(z)}{G(z)} = \frac{K_W(z)\ C(z)}{D(z)\ z^{-d'}}, \tag{1.6.30}$$

womit die Bedingung

$$K_W(z) = D(z)\ z^{-d'}\ K'_W(z) \tag{1.6.31}$$

bei freier Wahl des Polynoms $K'_W(z)$ sicherstellt, daß sowohl die Regelgröße als auch die Stellgröße eine endliche Einstellzeit besitzt. Als Zusatzbedingung muß gelten, daß

$$K_W(1) = D(1)\ K'_W(1) = 1, \tag{1.6.32}$$

also

$$K'_W(1) = \frac{1}{D(1)} \tag{1.6.33}$$

erfüllt ist. Unter Berücksichtigung der Gln.(1.6.17), (1.6.19), (1.6.23) und (1.6.29) ist

$$G_V(z) = \frac{K'_W(z)\ D_S(z)}{H_o(z)}\ . \tag{1.6.34}$$

Mit Gl.(1.6.27) vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$G_V(z) = \frac{K'_W(z)}{H'_o(z)}\ . \tag{1.6.35}$$

Für die Synthesegleichungen (1.6.23) und (1.6.27) erhält man aus der Berechnung des Vorfilters die Bedingung, daß die Polynome $H_o(z)$ und $H'_o(z)$ nur Nullstellen im Einheitskreis aufweisen dürfen. Desweiteren muß die Bedingung Gl.(1.6.33) realisiert werden. Dies kann leicht durch den Ansatz

$$K'_W(z) = K_{W1}(z)\ K_{W2}(z) \tag{1.6.36}$$

erfolgen, wobei $K_{W1}(z)$ die Bedingung

$$K_{W1}(1) = \frac{1}{D(1)\ K_{W2}(1)} \tag{1.6.37}$$

erfüllen muß. $K_{W2}(z)$ kann dann dazu benutzt werden, um die Stellgröße

$$U(z) = K_{W1}(z)\ K_{W2}(z)\ C(z)\ W(z) \tag{1.6.38}$$

im ersten oder in den ersten Abtastzeitpunkten mit

$$K_{W2}(z) = k_{W20} + k_{W21}\ z^{-1} + \ldots + k_{W2r}\ z^{-r'} \quad \text{für } r' < n$$

und (1.6.39)

$$K_{W1}(z) = K_{W1}(1) = k_o$$

vorzugeben. Hierbei kann so vorgegangen werden, daß die Stellgröße U(z) dargestellt wird als

$$U(z) = (\gamma'_o + \gamma'_1\ z^{-1} + \ldots + \gamma'_{(n+r)}\ z^{-(n+r')})\ W(z). \tag{1.6.40}$$

Faßt man die Koeffizienten γ_i im Vektor

$$\underline{\gamma}' = [\gamma'_o,\ \gamma'_1, \ldots, \gamma'_{n+r'}] \tag{1.6.41}$$

zusammen, so ist dieser Vektor gegeben durch

$$\underline{\gamma}' = \underline{C}\ \underline{k}_{W2}, \tag{1.6.42}$$

also

$$\underline{\gamma}' = \begin{bmatrix} c_o & 0 & & \\ c_1 & c_o & \underline{0} & \\ \vdots & \vdots & & \\ c_n & & 0 & \\ & c_n & c_o & 0 \\ & & \vdots & c_o \\ & \underline{0} & c_n & \vdots \\ & & 0 & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{W20} \\ k_{W21} \\ \vdots \\ k_{W2r} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\underline{C}$ hat die Dimension $(n+r'+1) \times (r'+1)$. Die in r' Abtastzeitpunkten vorzugebenden Stellgrößen lassen sich dann rekursiv für sprungförmige Stellgrößen $W(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ mit Hilfe von

$$U(i) = \sum_{j=o}^{i} \gamma'_j \quad \text{für } i = 0, \ldots . r \tag{1.6.43}$$

berechnen.

Zur Erhaltung der Entwurfsspielräume, die für die verschiedensten Syntheseaufgaben notwendig sind, wird das Polynom $K''_Z(z)$ in die Anteile $K_{Z1}(z)$ und $K_{Z2}(z)$ aufgespalten, wobei $K_{Z1}(z)$ wiederum unter den oben genannten Bedingungen frei wählbar ist und $K_{Z2}(z)$ mit Hilfe von Gl.(1.6.23) berechnet wird.

1.6.4 Auswertung der Synthesegleichungen

Zur Berechnung des Reglers $G_R(z)$ (Gl.(1.6.22)) und des Vorfilters $G_V(z)$ (Gl.(1.6.34)) ist die Bestimmung von $K''_Z(z) = K_{Z1}(z)$, $K_{Z2}(z)$ und $H'_o(z)$ notwendig. Die Synthesegleichung ist daher Gl.(1.6.23) oder mit Gl.(1.6.27)

$$1 - (1-z^{-1})\, C(z)\, K_{Z1}(z)\, K_{Z2}(z) = H'_o(z)\, D(z)\, z^{-d'}. \tag{1.6.44}$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Polynome werden wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
C(z) &= c_o + c_1\, z^{-1} + \ldots + c_n\, z^{-n} \\
K_{Z1}(z) &= \gamma_{10} + \gamma_{11}\, z^{-1} + \ldots + \gamma_{1q}\, z^{-q} \\
K_{Z2}(z) &= \gamma_{20} + \gamma_{21}\, z^{-1} + \ldots + \gamma_{2r}\, z^{-r} \\
H'_o(z) &= h_o + h_1\, z^{-1} + \ldots + h_v\, z^{-v}
\end{aligned}
\qquad (1.6.45)
$$

und

$$D(z) = d_o + d_1\, z^{-1} + \ldots + d_m\, z^{-m}.$$

Das Gleichungssystem (1.6.44) hat eine eindeutige Lösung, wenn für die Anzahl r+v+2 unbekannter Parameter genau

$$1 + n + q + r + 1 = v + m + d' + 1$$

Gleichungen vorhanden sind. Dies ist der Fall für

$$
\begin{aligned}
v &= n + q \\
\text{und} \qquad & \qquad (1.6.46) \\
r &= m + d' - 1 .
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung von $H'_o(z)$ und $K_{Z2}(z)$ wird die Gl.(1.6.44) umgeschrieben in

$$(1-z^{-1})\; C(z)\; K_{Z1}(z)\; K_{Z2}(z) + z^{-d'}\; D(z)\; H'_o(z) = 1 . \qquad (1.6.47)$$

Im ersten Schritt werden die Koeffizienten von

$$Q(z) = C(z)\; K_{Z1}(z) = q_o + q_1\, z^{-1} + \ldots + q_{n+q}\, z^{-(n+q)} \qquad (1.6.48)$$

mit Hilfe von

$$\begin{bmatrix} c_o & & & \underline{0} \\ c_1 & c_o & & \\ \vdots & c_1 & & \\ c_n & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & c_n & & c_o \\ & 0 & & c_1 \\ & & & \vdots \\ & \underline{0} & & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_o \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n+q} \end{bmatrix}$$

berechnet. In diesem Zwischenergebnis hat die Koeffizientenmatrix, die c_i enthält, die Dimension $(n+q+1) \times (q+1)$. Im nächsten Schritt wird gebildet

$$\begin{aligned} C'(z) &= (1-z^{-1})\, Q(z) \\ &= c'_o + c'_1\, z^{-1} + \ldots + c'_{n+q+1}\, z^{-(n+q+1)}, \end{aligned} \tag{1.6.49}$$

welches durch

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ -1 & 1 & 0 & & \underline{0} & \\ 0 & -1 & 1 & & & \\ & 0 & -1 & & 0 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & & 1 & 0 \\ & \underline{0} & & & -1 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_o \\ q_1 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \\ q_{n+q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_o \\ c'_1 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \\ c'_{n+q+1} \end{bmatrix}$$

möglich ist. Die Matrix auf der linken Seite der Gleichung hat die Dimension $(n+q+2) \times (n+q+1)$. Der erste Summand in Gl.(1.6.47) hat den Grad

$$n_1 = n+q+r+1 . \tag{1.6.50}$$

Die Koeffizienten dieses Terms lassen sich durch Multiplikation einer (n+q+r+2) x (r+1)-Matrix mit den entsprechenden Koeffizientenvektoren wie folgt berechnen:

$$\begin{bmatrix} c'_0 & 0 & & \\ c'_1 & c'_0 & & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c'_{n1-r} & & & 0 \\ 0 & c'_{n1-r} & & c'_0 \\ & 0 & & \vdots \\ \underline{0} & & & c'_{n1-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{20} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \gamma_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ p_{n1} \end{bmatrix} . \tag{1.6.51}$$

Die Koeffizienten p_i für $i = 0, \ldots, n_1$ sind durch

$$P(z) = (1-z^{-1})\ C(z)\ K_{Z1}(z)\ K_{Z2}(z)$$

gegeben.

Für die Berechnung des zweiten Terms aus Gl.(1.6.46) wird definiert

$$z^{-d'}\ D(z) = d'_0 + d'_1\ z^{-1} + \ldots + d_{d'+m}\ z^{-(d'+m)} = D'(z). \tag{1.6.52}$$

Die Koeffizienten d'_i sind demnach

$$d'_i = 0 \quad \text{für } i = 0, 1, \ldots, d'-1 ,$$

$$d'_i = d_{i-d'} \quad \text{für } i = d', \ldots, d'+m \tag{1.6.53}$$

und

$$d'_i = d_i \quad \text{für } d' = 0 .$$

Mit diesen Ansätzen läßt sich die Synthesegleichung in die Form

$$\underline{M}_d \, \underline{r}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.6.54}$$

mit der (n+q+r+2) x (r+v+2)-Matrix

$$\underline{M} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c'_o & 0 & & d'_o & 0 & \\ c'_1 & c'_o & \underline{0} & d'_1 & d'_o & \underline{0} \\ \vdots & c'_1 & 0 & \vdots & d'_1 & 0 \\ c'_{n1-r} & \vdots & c'_o & d_{d'+m} & \vdots & d'_o \\ & c'_{n1-r} & c'_1 & & d_{d'+m} & d'_1 \\ \underline{0} & & \vdots & \underline{0} & & \vdots \\ & & c'_{n1-r} & & & d_{d'+m} \end{array}\right] \tag{1.6.55}$$

und dem zu bestimmenden (r+v+2) x 1-Vektor

$$\underline{r}_d^T = [\gamma_{20}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{2r} \mid h_o, h_1, \ldots, h_v]$$

bringen.

Das Entwurfsverfahren soll wiederum am Beispiel des Transportsystems

$$G(s) = \frac{0.5}{s(1+s)} \, e^{-2s}$$

aus Kapitel 1.6.2 verifiziert werden. Die z-Transformation unter Berücksichtigung eines Haltegliedes nullter Ordnung liefert für eine Abtastzeit von $T = T_t$ die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{0.5677 \, z^{-1} + 0.297 \, z^{-2}}{1 - 1.1354 \, z^{-1} + 0.1354 \, z^{-2}} \, z^{-1},$$

welche in der Form von Gl.(1.6.14)

$$G(z) = \frac{D(z)}{C(z)}\, z^{-d'} = \frac{0.5677 + 0.297\, z^{-1}}{1 - 1.1354\, z^{-1} + 0.1354\, z^{-2}}\, z^{-2}$$

geschrieben werden kann. An die Regelung wird die Forderung gestellt, daß unabhängig vom Eingriffsort der Störungen die Regelgröße y eine endliche Einstellzeit besitzt. Diese Forderung bedingt die Anwendung der Gln.(1.6.27) und (1.6.23).

Für $m = 1$, $n = 2$ und $d' = 2$ sind die Koeffizienten von $K_{Z2}(z)$ und $H'_o(z)$ bei der Wahl von

$$K_{Z1}(z) = \gamma_{10} + \gamma_{11}\, z^{-1}$$

berechenbar für

$$v = n + q = 3$$

und

$$r = m + d' - 1 = 2\,.$$

Die Gln.(1.6.47), (1.6.48), (1.6.49) und (1.6.53) liefern direkt die Bestimmungsgleichungen zur Lösung der Gl.(1.6.54). Demnach ist

$$\underline{r}_d = \begin{bmatrix} \gamma_{20} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ h_o \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c'_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c'_1 & c'_o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c'_2 & c'_1 & c'_o & d_o & 0 & 0 & 0 \\ c'_3 & c'_2 & c'_1 & d_1 & d_o & 0 & 0 \\ c'_4 & c'_3 & c'_2 & 0 & d_1 & d_o & 0 \\ 0 & c'_4 & c'_3 & 0 & 0 & d_1 & d_o \\ 0 & 0 & c'_4 & 0 & 0 & 0 & d_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die numerische Auswertung liefert für $\gamma_{10} = 1$ und $\gamma_{11} = 0.8$ mit

$$c'_0 = 1$$

$$c'_1 = -1.335$$

$$c'_2 = -0.4375$$

$$c'_3 = 0.88124$$

$$c'_4 = -0.1083$$

den Lösungsvektor

$$\underline{r}_d^T = \{1.0,\ 1.335,\ 0.3765,\ 3.25,\ -1.337,\ -0.892,\ 0.1373\},$$

womit die Regelkreiselemente

$$G_R(z) = \frac{H'_o(z)}{(1-z^{-1})\ K''_Z(z)} = \frac{3.25-1.337z^{-1}-0.892z^{-2}+0.1373z^{-3}}{1+1.135z^{-1}-0.6906z^{-2}-1.1436z^{-3}-0.3012z^{-4}}$$

und

$$G_V(z) = \frac{1}{D(1)\ H'_o(z)} = \frac{1}{2.8092 - 1.156\ z^{-1} - 0.7717\ z^{-2} + 0.1187\ z^{-3}}$$

bestimmt sind.

Bei der simulativen Überprüfung der Regelergebnisse steht wiederum im Vordergrund, nicht nur das Verhalten des Regelkreises im Nennpunkt zu erfassen, sondern auch Parametervariationen im angegebenen Bereich zuzulassen. Die Überprüfung des Stör- und Führungsverhaltens in diesem Sinne ist für diesen Entwurf in jedem Fall notwendig, weil ohne Rücksicht auf die Dynamik der Regelstrecke alle Pole der vorgegebenen Übertragungsfunktionen nach $z = 0$ gelegt werden.

Für den als Nominalfall bekannten Parametersatz $K = 0.5$, $T = 1$ und $T_t = 2$ sind, wie man aus den Bildern 1.6.10 bis 1.6.12 erkennen kann, alle regelungstechnischen Anforderungen in Hinsicht auf Führungs-

und Störverhalten erfüllt. Bei Parametervariationen (Bild 1.6.13) ist der Entwurf unbrauchbar. Im Gegensatz zum Prädiktorentwurf, wo durch die Polvorgabe sichergestellt werden kann, daß das Regelverhalten robust bleibt, ist dies beim Deadbeat-Entwurf nicht in jedem Fall möglich.

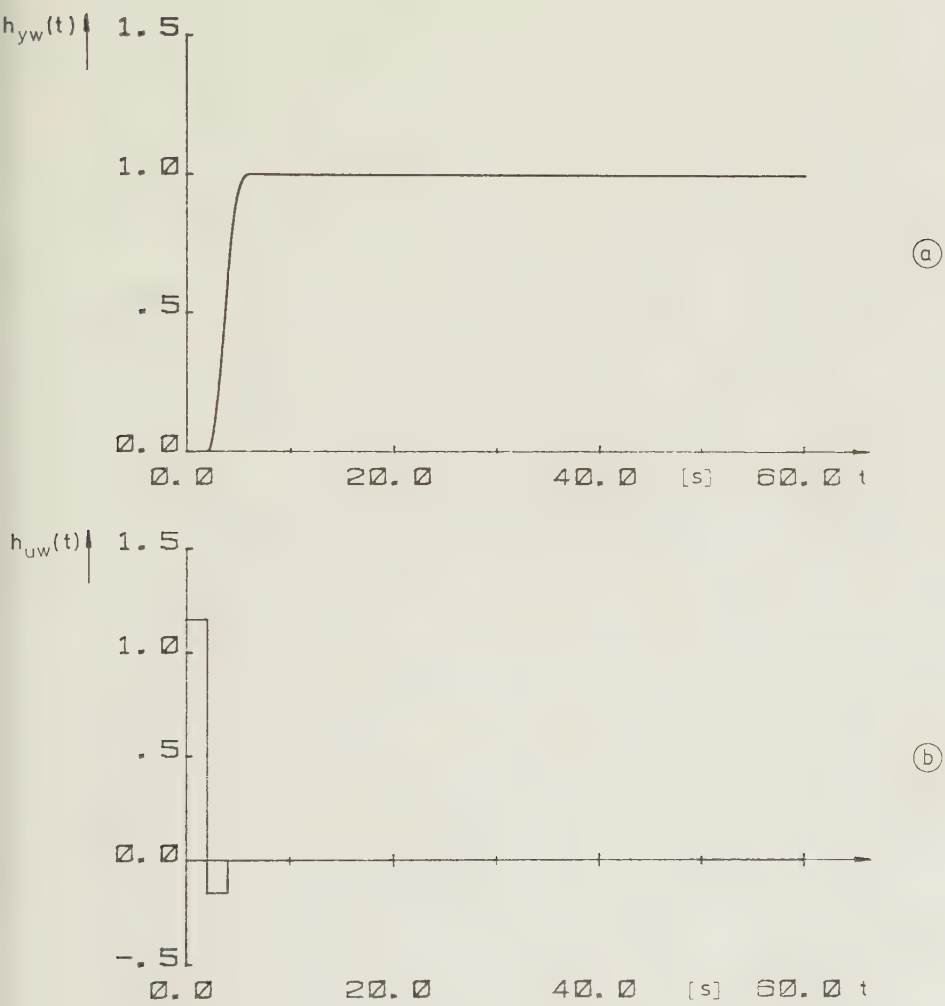


Bild 1.6.10. Übergangsfunktionen
$h_{yw}(t)$ (a) und $h_{uw}(t)$ (b)
für $w(t) = s(t)$, $k = 0.5$, $T = 1$, $T_t = 2$

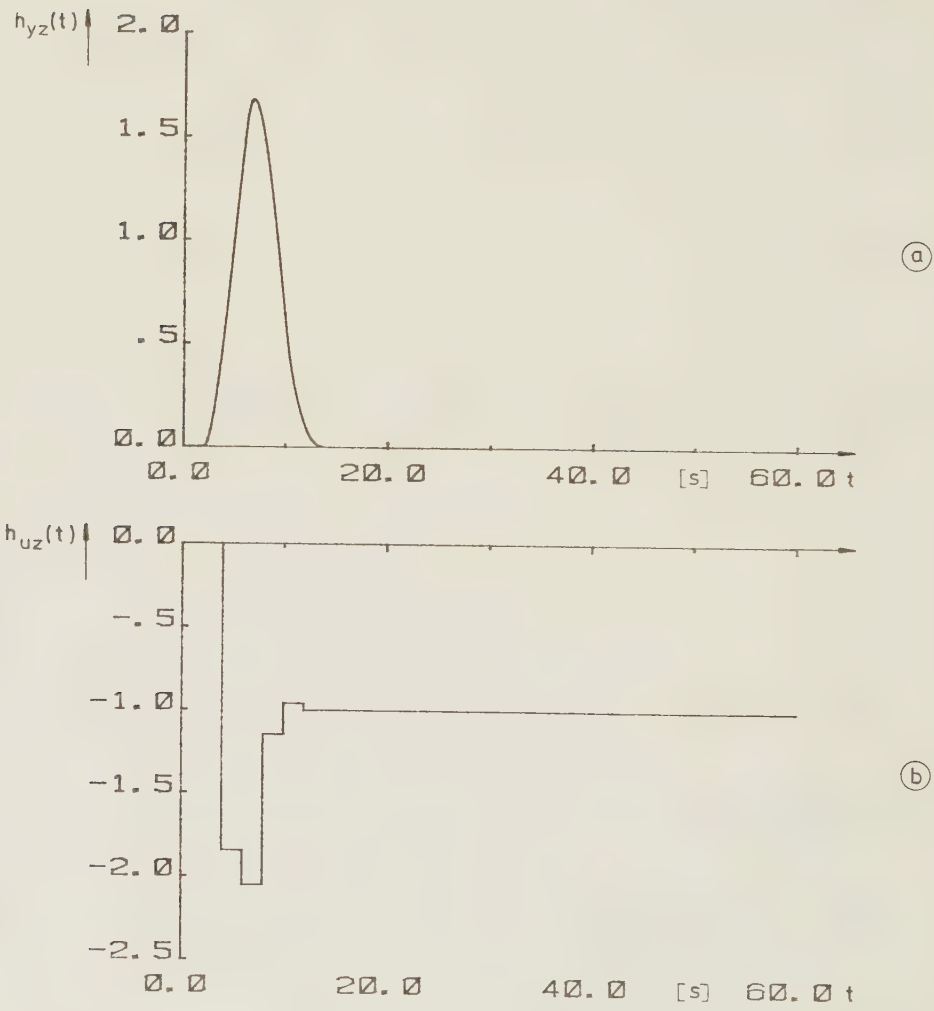


Bild 1.6.11. Übergangsfunktionen
$h_{yz}(t)$ (a) und $h_{uz}(t)$ (b)
für $z_E(t) = s(t)$, $k = 0.5$, $T = 1$, $T_t = 2$

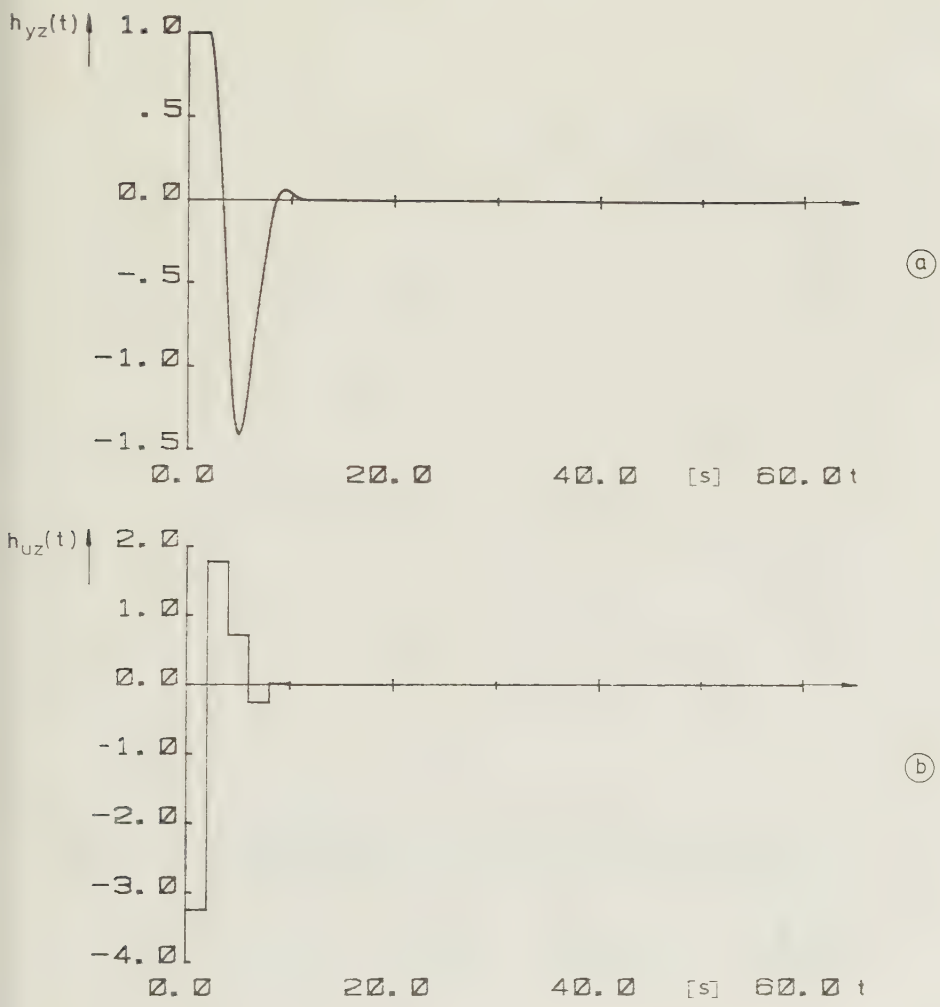


Bild 1.6.12. Übergangsfunktionen
$h_{yz}(t)$ (a) und $h_{uz}(t)$ (b)
für $z_A(t) = s(t)$, $k = 0.5$, $T = 1$, $T_t = 2$

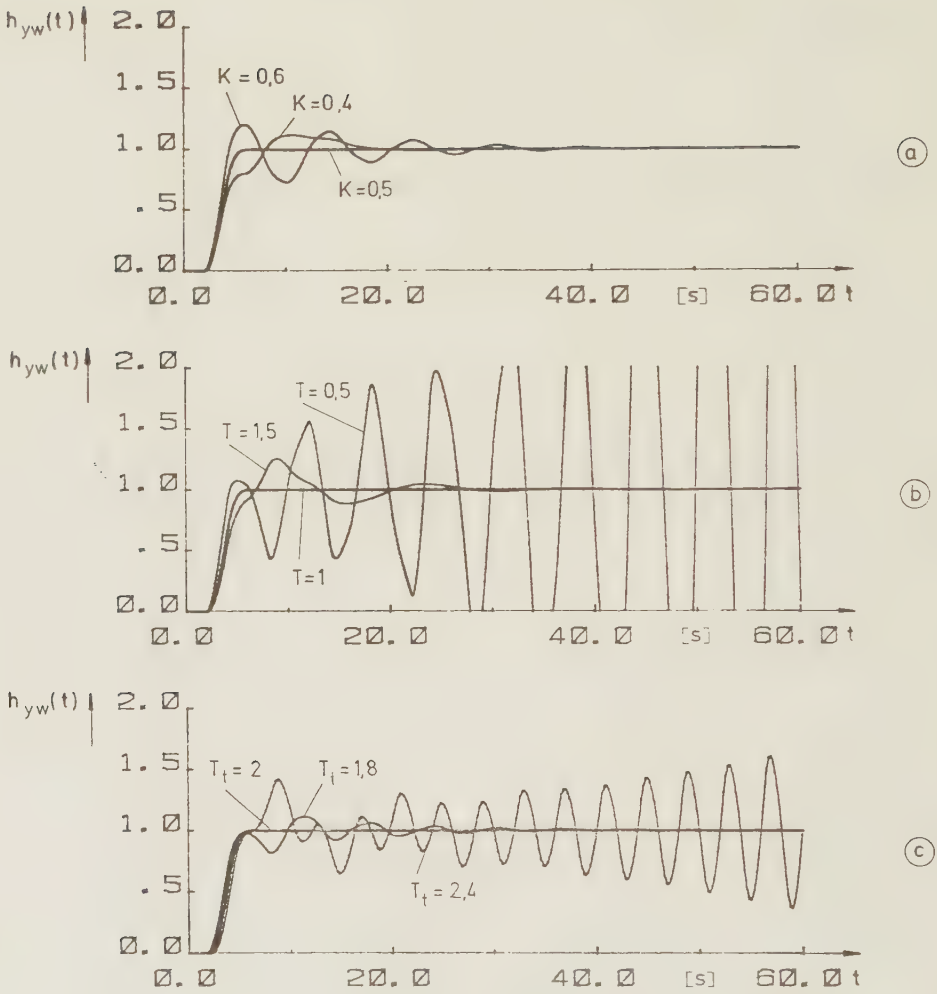


Bild 1.6.13. Übergangsfunktionen $h_{yw}(t)$ für $w(t) = s(t)$ und
(a) $k = 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ T = 1,\ T_t = 2$
(b) $k = 0.5,\ T = 0.5,\ T = 1,\ T = 1.5$
(c) $k = 0.5,\ T = 1,\ T_t = 1.8,\ 2.0,\ 2.4$

2. Entwurf von Zustandsreglern im Frequenzbereich mit Stör- und Führungsmodellansatz

2.1 Problemstellung

Bei Reglerentwürfen, die sowohl Führungs- als auch Störgrößen berücksichtigen, wird für die asymptotische Störkompensation zumeist nur ein I-Anteil im Regler vorgesehen, da sprungförmige Störungen vorausgesetzt werden. Treten Störsignale anderer Form auf, so ist es möglich, bei meßbaren Störungen die Störgröße aufzuschalten und vollständig zu kompensieren. Führt man ein Modell des Störprozesses ein, so gelingt es, unabhängig vom Eingriffsort der Störungen auch nicht meßbare Störungen vollständig zu kompensieren. Wird die Synthese des Regelkreises mit Stör- und Führungsmodellansatz im Zeitbereich durchgeführt, so ist sie recht aufwendig. Hippe bzw. Hippe und Wurmthaler haben in ihren Beiträgen [12] bis [14] deshalb ein Verfahrem zum Entwurf von Zustandsreglern im Frequenzbereich mit Stör- und Führungsmodellansatz vorgestellt. Dies hat den Vorteil, daß die Reglersynthese mit Hilfe linearer algebraischer Gleichungen durchgeführt werden kann. Insbesondere in [14] wird vorgeschlagen, durch geschickte Wahl einiger freier Parameter beim Entwurf einen Zustandsregler "*minimaler*" Ordnung für Stör- und Führungsverhalten zu realisieren. Bei konsequenter Weiterentwicklung de. gemachten Ansätze, wie sie in [36] weiter ausgearbeitet wurden, zeigt sich jedoch, daß weitere frei zu wählende Parameter zur Verringerung der Ordnung des Zustandsreglers mit Störkompensation benutzt werden können. Der Schwerpunkt der folgenden Betrachtungen liegt deshalb bei der Reduzierung der Ordnung des Zustandsreglers unter Berücksichtigung der Störübertragungsfunktionen. Darüber hinaus wird auch der Fall betrachtet, daß die Auswirkungen der Störungen auf zwei Regelgrößen kompensiert werden.

2.1.1 Die Ansätze zur Definition der Struktur des Regelkreises

Die Reglersynthese im Zeitbereich und deren Transformation in den Frequenzbereich ist in [12] bis [14] umfassend dargestellt, so daß

an dieser Stelle nur kurz auf die wesentlichen Ansätze eingegangen werden soll. Gegeben sei die lineare zeitinvariante Regelstrecke n-ter Ordnung mit ρ Störgrößen, die beschrieben werden kann durch

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\ \underline{x}(t) + \underline{b}\ \underline{u}(t) + \underline{X}\ \underline{z}(t)$$

und

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\ \underline{x}(t) + \underline{Q}\ \underline{z}(t). \qquad (2.1.1)$$

Die das System beschreibenden Matrizen haben folglich die Dimension:

$$\underline{A}(nxn),\ \underline{b}(nx1),\ \underline{X}(nx\rho),\ \underline{C}(mxn),\ \underline{Q}(mx\rho)$$

und

$$\underline{x}(t)(nx1),\ u(t)(1x1),\ \underline{z}(t)(\rho x1),\ \underline{y}(t)(mx1).$$

Der Störvektor $\underline{z}(t)$, der die Hauptregelgröße

$$y_1(t) = \underline{c}_1^T\ \underline{x}(t) + \underline{q}_1^T\ \underline{z}(t) \qquad (2.1.2)$$

beeinflußt, sei entstanden aus einem Störprozeß q-ter Ordnung

$$\dot{\underline{v}}(t) = \underline{S}\ \underline{v}(t) + \underline{\sigma}(t)$$

$$\underline{z}(t) = \underline{H}\ \underline{v}(t). \qquad (2.1.3)$$

Die Führungsgröße w(t) kann analog hierzu beschrieben werden als Prozeß k-ter Ordnung

$$\dot{\underline{\omega}}(t) = \underline{W}\ \underline{\omega}(t) + \underline{\eta}(t)$$

$$w(t) = \underline{\vartheta}^T\ \underline{\omega}. \qquad (2.1.4)$$

Für die beiden Modelle muß gelten, daß ($\underline{S}$, $\underline{H}$) und ($\underline{W}$, $\underline{\vartheta}$) vollständig beobachtbar sind. Die in [14] formulierte Aufgabe besteht nun darin,

- die Auswirkungen der Störungen, entsprechend Gl.(2.1.3), auf die Regelgröße asymptotisch zu kompensieren, und

- der vorgegebenen Führungsgröße w(t) nach Gl.(2.1.4) soll $y_1(t)$ ohne bleibende Regelabweichung folgen.

Würde man den Regelkreis mit Zustands- und Störbeobachter darstellen, so wäre die Ordnung des Zustandsbeobachters durch n_B, mit $\nu - 1 \leq n_B \leq \nu$, gegeben und die Ordnung des Störbeobachters durch q. ν stellt hierbei den Beobachtungsindex der Regelstrecke dar. Bei der Darstellung im Frequenzbereich faßt man jedoch Beobachter und Regler zu *einem* Mehrgrößenregler der Ordnung (n_B+q) zusammen. Dieser Regler hat als Eingangsgrößen $y_i(t)$ $(i = 1,\ldots,m)$ und w(t) und als Ausgangsgröße u(t). Die Synthese beschränkt sich also darauf, (m+1) Regler zu entwerfen. Der Einfluß von Störungen läßt sich mit Hilfe von Gl.(2.1.1) und Gl.(2.1.3) entsprechend umschreiben in:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1_{St1}(s) & \ldots & G^\rho_{St1}(s) \\ \vdots & & \\ G^1_{Stm}(s) & \ldots & G^\rho_{Stm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(s) \\ \vdots \\ Z_\rho(s) \end{bmatrix}, \tag{2.1.5}$$

wobei definiert wird

$$\underline{G}_{Sti}(s) = [\underline{G}^1_{Sti}(s), \ \ldots \ \underline{G}^\rho_{Sti}(s)] \tag{2.1.5a}$$

und

$$G^j_{Sti}(s) = \frac{Y_i(s)}{Z_j(s)} \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, \rho \tag{2.1.5b}$$

Für die Regelstrecke n-ter Ordnung mit einem Eingang und m Ausgängen wird angesetzt

$$\frac{Y_i(s)}{U(s)} = G_{Si}(s). \tag{2.1.5c}$$

Ebenso wie beim Zustandsregler

$$G_{Ri}(s) = \frac{U(s)}{Y_i(s)} = \frac{Z_{Ri}(s)}{N_R(s)} \quad \text{bzw.} \quad G_{RW} = \frac{U(s)}{W(s)} = \frac{Z_{RW}(s)}{N_R(s)} \tag{2.1.5d}$$

wird in den Übertragungsfunktionen $G^{j}_{Sti}(s)$ und $G_{Si}(s)$ nach [14] das gleiche Nennerpolynom angesetzt, also

$$\frac{Y_{iZ}(s)}{Z_j(s)} = G^{j}_{Sti}(s) = \frac{Z^{j}_{Sti}(s)}{N_S(s)}$$

und

$$\frac{Y_i(s)}{U(s)} = G_{Si}(s) = \frac{Z_{Si}(s)}{N_S(s)} \quad . \tag{2.1.5e}$$

Die sich ergebende Struktur des Regelkreises ist in Bild 2.1.1 dargestellt.

Für den geschlossenen Regelkreis sind nun die Übertragungsfunktionen $\frac{Y_1(s)}{W(s)}$ und $\frac{Y_1(s)}{Z_j(s)}$ gesucht. Hierzu wird die Stellgröße

$$U(s) = \frac{G_{RW}(s)\ W(s) + \sum_{i=1}^{m} G_{Ri}(s)\ \underline{G}_{Sti}(s)\ \underline{Z}(s)}{1 - \sum_{i=1}^{m} G_{Ri}(s)\ G_{Si}(s)} \tag{2.1.6}$$

und der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{m} \underline{G}_{Sti}(s)\ \underline{Z}(s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\rho} G^{j}_{Sti}(s)\ Z_{\rho}(s) \tag{2.1.7}$$

unter Berücksichtigung von Gl.(2.1.5) berechnet. Mit

$$Y_1(s) = G_{S1}(s)\ U(s) + \underline{G}_{St1}(s) \cdot \underline{Z}(s)$$

folgt

$$Y_1 = \frac{G_{S1}(s)\ G_{RW}(s)\ W(s)}{1 - \sum_{i=1}^{m} G_{Ri}(s)\, G_{Si}(s)} + \frac{G_{S1} \cdot \sum_{i=1}^{m} G_{Ri}(s)\ \underline{G}_{Sti}(s)\ \underline{Z}(s)}{1 - \sum_{i=1}^{m} G_{Ri}(s)\ G_{Si}(s)}$$

$$+ G_{St1}(s)\ \underline{Z}(s) = Y_{1W}(s) + Y_{1Z}(s) \quad . \tag{2.1.8}$$

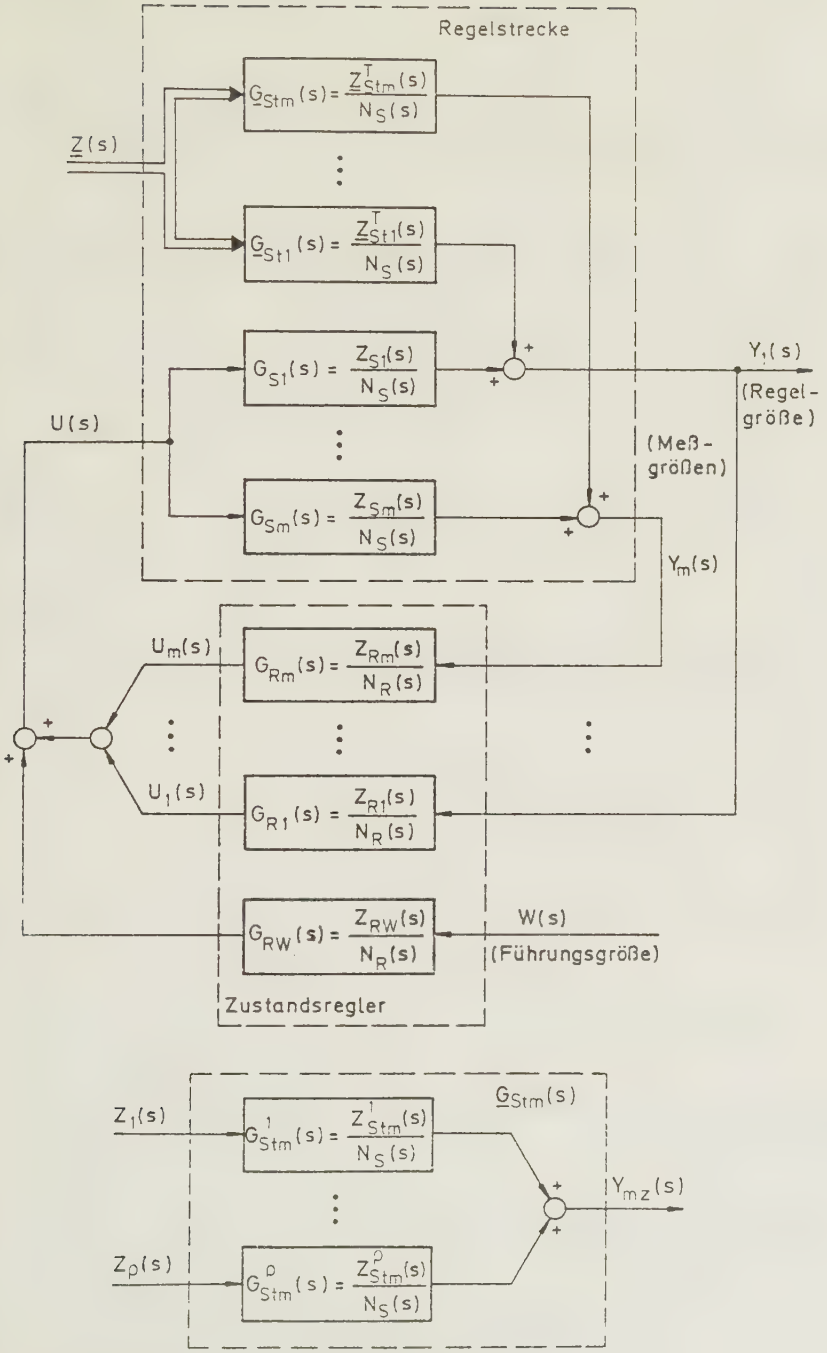


Bild 2.1.1. Struktur des Regelkreises

Für den zweiten Term in Gl.(2.1.8) läßt sich unter Berücksichtigung von Gl.(2.1.7) ermitteln

$$Y_{1Z}(s) = \frac{G_{S1}(s) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\rho} G_{Ri}(s)\, G^{j}_{Sti}(s)\, Z_j(s)}{1 - \sum_{i=1}^{m} G_{Ri}(s)\, G_{Si}(s)} + \sum_{j=1}^{\rho} G^{j}_{St1}(s)\, Z_j(s) . \tag{2.1.9}$$

Für die j-te Störgröße $Z_j(s)$ folgt somit

$$\frac{Y_{1Z}(s)}{Z_j(s)} = \frac{G_{S1}(s) \sum_{i=1}^{m} G_{Ri}(s)\, G^{j}_{Sti}(s)}{1 - \sum_{i=1}^{m} G_{Ri}(s)\, G_{Si}(s)} + G^{j}_{St1}(s) . \tag{2.1.10}$$

Einsetzen der Gln.(2.1.5d) bis (2.1.5e) in die Gln.(2.1.8) und (2.1.10) liefert die Beziehungen

$$\frac{Y_{1W}(s)}{W(s)} = \frac{Z_{S1}(s)\, Z_{RW}(s)}{N_R(s)\, N_S(s) - \sum_{i=1}^{m} Z_{Ri}(s)\, Z_{Si}(s)} , \tag{2.1.11a}$$

$$\frac{Y_{1Z}(s)}{Z_j(s)} = \frac{Z^{j}_{St1}(s) N_R(s) N_S(s) + \sum_{i=2}^{m} Z_{Ri}(s) [Z_{S1}(s) Z^{j}_{Sti}(s) - Z^{j}_{St1}(s) Z_{Si}(s)]}{N_S(s)\, [N_R(s)\, N_S(s) - \sum_{i=1}^{m} Z_{Ri}(s)\, Z_{Si}(s)]}$$

$$\text{für } j = 1,2, \ldots \rho . \tag{2.11b}$$

Die sich ergebende Regelabweichung im Führungsfall errechnet sich zu

$$E(s) = W(s) - Y_1(s) \tag{2.1.12}$$

und ist somit

$$\frac{E(s)}{W(s)} = 1 - \frac{Y_1(s)}{W(s)} = \frac{N_R(s)\, N_S(s) - Z_{RW}(s)\, Z_{S1}(s) - \sum_{i=1}^{m} Z_{Ri}(s)\, Z_{Si}(s)}{N_R(s)\, N_S(s) - \sum_{i=1}^{m} Z_{Ri}(s)\, Z_{Si}(s)}$$

2.2 Polynomansätze für den Zustandsregler

Das charakteristische Polynom des Regelkreises ist

$$P_C(s) = N_R(s)\, N_S(s) - \sum_{i=1}^{m} Z_{Ri}(s)\, Z_{Si}(s) \qquad (2.2.1)$$

mit dem Grad $n_B + n + q$. Gl.(2.2.1) läßt sich nach [14] auch formulieren als

$$P_C(s) = P_{STR}(s)\, P_{STM}(s) \cdot P_B(s), \qquad (2.2.2)$$

wobei

$$P_{STR}(s) = \beta_o + \beta_1\, s + \ldots + \beta_{n-1}\, s^{n-1} + s^n \qquad (2.2.3)$$

die n vorgegebenen Pole des geschlossenen Regelkreises enthält. Das charakteristische Polynom des Störmodells im geregelten Zustand ist gegeben durch

$$P_{STM}(s) = \beta^1_o + \beta^1_1\, s + \ldots + \beta^1_{q-1}\, s^{q-1} + s^q. \qquad (2.2.4)$$

Die Wurzeln des Polynoms $P_B(s)$ sind die n_B Pole des Zustandbeobachters und werden dargestellt als

$$P_B(s) = \varphi^1_o + \varphi^1_1\, s + \ldots + \varphi^1_{n_B-1}\, s^{n_B-1} + s^{n_B}. \qquad (2.2.5)$$

Die charakteristischen Polynome von Zustands- und Störbeobachter werden zusammengefaßt in

$$\hat{P}_B(s) = P_B(s) \cdot P_{STM}(s) = \varphi_o + \varphi_1\, s + \ldots + \varphi_{n_B+q-1}\, s^{n_B+q-1} + s^{n_B+q}. \qquad (2.2.6)$$

Berücksichtigt man zu Anfang nur das Störverhalten des Regelkreises und definiert

$$\det(s\underline{I} - \underline{S}) = \psi_o + \psi_1\, s + \ldots + \psi_{q-1}\, s^{q-1} + s^q \qquad (2.2.7)$$

gemäß Gl.(2.1.3) als das charakteristische Polynom des Störmodells, so folgt mit Hilfe von Gl.(2.1.11b), daß die Auswirkungen von Störungen auf die Regelgröße $y_1(t)$ asymptotisch kompensiert werden, wenn der Zähler der Störübertragungsfunktion $\frac{Y_{1Z}(s)}{Z_j(s)}$ das charakteristische Polynom $\det(s\underline{I} - \underline{S})$ des Störmodells nach Gl.(2.1.3) enthält. Hierzu müssen die Polynome $Z_{Ri}(s)$ für $i = 2,3,\ldots,m$ und $N_R(s)$ als Teiler $\det(s\underline{I} - \underline{S})$ enthalten. Da der Grad von $N_S(s)$ n ist und das charakteristische Polynom $P_C(s)$ den Grad n_B+n+q hat, ist der Grad von $N_R(s)$ durch n_B+q gegeben. Mit diesen Ansätzen lassen sich die Übertragungsfunktionen der Regler wie folgt formulieren:

$$G_{R1}(s) = \frac{Z_{R1}(s)}{N_R(s)} = \frac{Z_{R1}(s)}{\det(s\underline{I} - \underline{S})\ N'_R(s)}$$

$$= \frac{l^1_o + l^1_1\ s + \ldots + l^1_{n_B+q}\ s^{n_B+q}}{(\psi_o+\psi_1 s+\ldots+\psi_{q-1}s^{q-1}+s^q)\,(p_o+p_1 s+\ldots+p_{n_B-1}\cdot s^{n_B-1}+s^{n_B})} \qquad (2.2.8)$$

$$G_{Ri}(s) = \frac{Z_{Ri}(s)}{N_R(s)} = \frac{\det(s\underline{I}-\underline{S})\ Z'_{Ri}(s)}{\det(s\underline{I}-\underline{S})\ N'_R(s)}$$

$$= \frac{l^i_o + l^i_1\ s + \ldots + l^i_{n_B}\ s^{n_B}}{p_o + p_1\ s + \ldots + p_{n_B-1}\ s^{n_B-1} + s^{n_B}} \qquad (2.2.9)$$

für $i = 2, \ldots, m$.

In diesen Übertragungsfunktionen müssen nun die Polynome $Z_{R1}(s)$, $Z'_{Ri}(s)$ und $N'_R(s)$ bestimmt werden. Sie enthalten $m(n_B+1) + 2\ n_B+1+1$ Parameter, die zu ermitteln sind. Grundlage hierfür ist das charakteristische Polynom des Regelkreises nach Gl.(2.2.1). Nach Einsetzen der Gleichungen (2.2.3), (2.2.6), (2.2.8) und (2.2.9) ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$N_S(s)\det(s\underline{I}-\underline{S})\,N'_R(s) - Z_{S1}(s)\,Z_{R1}(s) - \sum_{i=2}^{m} Z_{Si}(s)\det(s\underline{I}-\underline{S})\,Z'_{Ri}(s)$$

$$= P_{STR}(s)\cdot\hat{P}_B(s). \qquad (2.2.10)$$

Hierbei wird in Gl.(2.1.5e) berücksichtigt

$$G_{Si}(s) = \frac{c_o^i + c_1^i\, s + \ldots + c_{n-1}^i\, s^{n-1}}{a_o + a_1\, s + \ldots + a_{n-1}\, s^{n-1} + s^n} = \frac{Z_{Si}(s)}{N_S(s)} \quad \text{für } i = 2, \ldots, m \qquad (2.2.11)$$

und

$$G^j_{Sti}(s) = \frac{d_o^{ji} + d_1^{ji}\, s + \ldots + d_n^{ji}\, s^n}{a_o + a_1\, s + \ldots + a_{n-1}\, s^{n-1} + s^n} = \frac{Z^j_{Sti}(s)}{N_S(s)} \qquad (2.2.12)$$

für $i = 1,2, \ldots, m$ und $j = 1,2, \ldots, \rho$

Führt man zusätzlich ein

$$N_S(s)\cdot\det(s\underline{I}-\underline{S}) = (\alpha_o + \ldots\ \alpha_{n+q-1}\, s^{n+q-1} + s^{n+q}) \qquad (2.2.13)$$

und

$$Z_{Si}(s)\cdot\det(s\underline{I}-\underline{S}) = (\gamma_o^i + \ldots + \gamma^i_{n+q-1}\, s^{n+q-1}), \quad i = 2,\ldots,m, \qquad (2.2.14)$$

so kann Gl.(2.2.10) schließlich dargestellt werden als

$$(s^{n+q} + \alpha_{n+q-1}\, s^{n+q-1} + \ldots + \alpha_o)(p_o + p_1\, s + \ldots + p_{n_B-1}\, s^{n_B-1} + s^{n_B}) -$$

$$- (c_o^1 + c_1^1\, s + \ldots + c_{n-1}^1\, s^{n-1})(l_o^1 + l_1^1\, s + \ldots + l^1_{n_B+q}\, s^{n_B+q}) -$$

$$- \sum_{i=2}^{m} (\gamma_o^i + \gamma_1^i\, s + \ldots + \gamma^i_{n+q-1}\, s^{n+q-1})(l_o^i + l_1^i\, s + \ldots + l^i_{n_B}\, s^{n_B})$$

$$= (\beta_o + \beta_1\, s + \ldots + \beta_{n-1}\, s^{n-1} + s^n)(\varphi_o + \varphi_1\, s + \ldots + \varphi_{n_B+q-1}\, s^{n_B+q-1}$$

$$+ s^{n_B+q}). \qquad (2.2.15)$$

Das allgemeine Koeffizientenschema ist ebenfalls bereits in [13] enthalten und wird beschrieben als

$$\underline{K}_h \; \underline{h} = \underline{B} \;\; \underline{\Psi} + \underline{\delta} - \underline{B}_{\psi} \; \underline{\dot{v}}, \tag{2.2.16}$$

wobei der $(m(n_B+1) + n_B+q) \times 1$-Vektor $\underline{h}$ die Reglerkoeffizienten enthält. Die Gln.(2.2.15) und (2.2.16) sollen an dieser Stelle für $n = 4$, $n_B = 2$, $q = 3$, $m = 2$ und $k = 2$ verifiziert werden. Somit folgt für den Koeffizientenvektor $\underline{h}$:

$$\underline{h}^T = [p_1, \; p_o, \; -l_5^1, \; -l_4^1, \; -l_3^1, \; -l_2^1, \; -l_1^1, \; -l_o^1, \; -l_2^2, \; -l_1^2, \; -l_o^2]. \tag{2.2.17}$$

Die $n+q = 7$ Koeffizienten α_i aus Gl.(2.2.13) lassen sich aus

$$\begin{bmatrix} \alpha_6 \\ \alpha_5 \\ \alpha_4 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & 1 & o & o \\ a_2 & a_3 & 1 & o \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ a_o & a_1 & a_2 & a_3 \\ o & a_o & a_1 & a_2 \\ o & o & a_o & a_1 \\ o & o & o & a_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_o \end{bmatrix} \tag{2.2.18}$$

ermitteln. Analog hierzu werden $n+q$-Koeffizienten γ_i^2 aus Gl.(2.2.14) mit Hilfe von

$$\begin{bmatrix} \gamma_6^2 \\ \gamma_4^2 \\ \gamma_4^2 \\ \gamma_3^2 \\ \gamma_2^2 \\ \gamma_1^2 \\ \gamma_o^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3^2 & o & o & o \\ c_2^2 & c_3^2 & o & o \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & o \\ c_o^2 & c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ o & c_o^2 & c_1^2 & c_2^2 \\ o & o & c_o^2 & c_1^2 \\ o & o & o & c_o^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_o \end{bmatrix} \qquad (2.2.19)$$

ermittelt.

Die $((n+n_B+q) \times (m(n_B+1)+n_B+q))$-Matrix $\underline{K}_h$ ist gegeben durch

$$\underline{K}_h = \begin{bmatrix} 1 & o & c_3^1 & o & o & o & o & o & \gamma_6^2 & o & o \\ \alpha_6 & 1 & c_2^1 & c_3^1 & o & o & o & o & \gamma_5^2 & \gamma_6^2 & o \\ \alpha_5 & \alpha_6 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & o & o & o & \gamma_4^2 & \gamma_5^2 & \gamma_6^2 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & c_o^1 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & o & o & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 & \gamma_5^2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & o & c_o^1 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & o & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & o & o & c_o^1 & c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 & \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & o & o & o & c_o^1 & c_1^1 & c_2^1 & \gamma_o^2 & \gamma_1^2 & \gamma_2^2 \\ \alpha_o & \alpha_1 & o & o & o & o & c_o^1 & c_1^1 & o & \gamma_o^2 & \gamma_1^2 \\ o & \alpha_o & o & o & o & o & o & o & o & o & \gamma_o^2 \end{bmatrix}. \qquad (2.2.20)$$

Die $(n+n_B+q) \times (n_B+q) = 9x5$-Matrix $\underline{B}_\varphi$ enthält die Koeffizienten von $P_{STR}(s)$. Daraus folgt

$$\underline{B}_\varphi \cdot \underline{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \beta_3 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_4 \\ \varphi_3 \\ \varphi_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_0 \end{bmatrix} . \qquad (2.2.21)$$

Der $(n+n_B+q) \times 1 = 9x1$-Vektor $\underline{\delta}$ ist gegeben durch

$$\underline{\delta} = \begin{bmatrix} \beta_3 - a_3 \\ \beta_2 - a_2 \\ \beta_1 - a_1 \\ \beta_0 - a_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \qquad (2.2.22)$$

Die Koeffizienten des Polynoms $N_S(s)$ sind in der $(n+n_B+q) \times q = 9x3$-Matrix $\underline{B}_\psi$ enthalten, und somit ist

$$\underline{B}_{\psi} \cdot \underline{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 \\ a_2 & a_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_0 \end{bmatrix} . \qquad (2.2.23)$$

Mit Hilfe von Gl.(2.2.16) ist Gl.(2.2.10) und damit die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises festgelegt. Zur Bestimmung des Führungsverhaltens ist in Gl.(2.1.11a) das Polynom $Z_{RW}(s)$ für die Reglerübertragungsfunktion $G_{RW}(s) = \frac{Z_{RW}(s)}{N_R(s)}$ zu ermitteln. Da $N_R(s)$ ein Polynom n_B+q-ten Grades ist, kann $Z_{RW}(s)$ maximal (n_B+q+1) frei wählbare Parameter enthalten. Der Führungsprozeß k-ter Ordnung nach Gl.(2.1.4) besitzt die charakteristische Gleichung

$$\det(s\underline{I}-\underline{W}) = \eta_o + \eta_1 \, s + \ldots + \eta_{k-1} \, s^{k-1} + s^k . \qquad (2.2.24)$$

Damit keine bleibende Regelabweichung auftritt, muß die Übertragungsfunktion $\frac{E(s)}{W(s)}$ nach Gl.(2.1.13) das Polynom $\det(s\underline{I}-\underline{W})$ als Teiler enthalten. Diese Forderung kann durch $Z_{RW}(s)$ erfüllt werden, wenn $k < n_B+q$ ist. Die n_B+q+1 freien Parameter in $Z_{RW}(s)$ können nun so gewählt werden, daß 1 Parameter für sprungförmige Führungsmodelle, k Parameter für $\det(s\underline{I}-\underline{W})$ und die restlichen für die Kompensation einiger Wurzeln von $P_{STM}(s) \cdot P_B(s)$ mit Hilfe von $\Delta a(s)$. Somit ist

$$\hat{P}_B(s) = P_{STM}(s) \cdot P_B(s) = \Delta a(s) \cdot \Delta f(s) \qquad (2.2.25)$$

und

$$\Delta f(s) = \varphi_o^* + \varphi_1^* \, s + \ldots + \varphi_{k-1}^* \, s^{k-1} + s^k . \tag{2.2.26}$$

Unter Berücksichtigung von Gl.(2.1.13) erhält man mit diesen Ansätzen:

$$-Z_{RW}(s) \cdot Z_{S1}(s) + \Delta a(s) \; \Delta f(s) \; P_{STR}(s) = s \det(s\underline{I} - \underline{W}) \; \Delta a(s) \; RP(s) . \tag{2.2.27}$$

RP(s) ist ein Polynom vom Grad n-1, das durch

$$RP(s) = \tilde{a}_o + \tilde{a}_1 \, s + \ldots + \tilde{a}_{n-2} \, s^{n-2} + s^{n-1} \tag{2.2.28}$$

definiert ist. Hat $Z_{S1}(s)$ in

$$\frac{Y_{1W}(s)}{W(s)} = \frac{Z_{S1}(s) \cdot Z_{RW}(s)}{\Delta a(s) \; \Delta f(s) \; P_{STR}(s)}$$

keinen Teiler, der s oder $\det(s\underline{I} - \underline{W})$ enthält, so kann $Z_{RW}(s)$ definiert werden als

$$Z_{RW}(s) = \tilde{Z}_{RW}(s) \cdot \Delta a(s) . \tag{2.2.29}$$

Mit diesem Ansatz kann Gl.(2.2.28) umgeformt werden in

$$\tilde{Z}_{RW} \; Z_{S1}(s) + s \, \det(s\underline{I} - \underline{W}) \; RP(s) = P_{STR}(s) \cdot \Delta f(s) . \tag{2.2.29a}$$

Das Führungsverhalten und die Regelabweichung sind somit gegeben durch

$$\frac{Y_{1W}(s)}{W(s)} = \frac{Z_{S1}(s) \cdot \tilde{Z}_{RW}(s)}{\Delta f(s) \cdot P_{STR}(s)} \tag{2.2.30}$$

und

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{s \, \det(s\underline{I} - \underline{W}) \; RP(s)}{\Delta f(s) \; P_{STR}(s)} . \tag{2.2.31}$$

Mit Hilfe eines Koeffizientenvergleichs können aus Gl.(2.2.29a) die (n+k)-Koeffizienten von RP(s) und

$$\tilde{Z}_{RW}(s) = \nu_o + \nu_1\, s + \ldots + \nu_k\, s^k \tag{2.2.32}$$

bestimmt werden. Dies geschieht wiederum mit Hilfe des zu Gl. (2.2.16) analogen Rechenschemas

$$\underline{K}_f \cdot \underline{h}_f = \underline{B}^* \cdot \underline{\varphi}^* + \underline{\delta}_B - \underline{\delta}_\eta . \tag{2.2.33}$$

Die unbekannten Koeffizienten ν_i und $\tilde{a}_i$ werden im 1x(n+k)-Vektor

$$\underline{h}_f^T = [\nu_k, \ \ldots \ \nu_1, \ \nu_o, \ \tilde{a}_{n-2}, \ \tilde{a}_{n-3}, \ \ldots \ \tilde{a}_o]$$

zusammengefaßt. Die (n+k)x(n+k)-Matrix $\underline{K}_f$ besteht aus den Koeffizienten des Zählerpolynoms von $G_{S1}(s)$ und det($s\underline{I}-\underline{W}$):

$$\underline{K}_f = \left[\begin{array}{cccc|cccc} c^1_{n-1} & 0 & & \underline{0} & 1 & 0 & & \underline{0} \\ c^1_{n-2} & c^1_{n-1} & & & \eta_{k-1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \eta_{k-2} & \eta_{k-1} & & \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c^1_o & c^1_1 & \ldots & c^1_k & \eta_o & \eta_1 & \ldots & \eta_{n-2} \\ & c^1_o & & & 0 & \eta_o & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & c^1_o & & & & \eta_o \\ & \underline{0} & & & & \underline{0} & & 0 \end{array}\right] . \tag{2.2.34}$$

Die rechte Seite von Gl.(2.2.33) besteht aus:

$$\underline{B}^* \cdot \underline{\varphi}^* + \underline{\delta}_B - \underline{\delta}_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \underline{0} \\ \beta_{n-1} & 1 & \ddots & \\ \beta_{n-2} & \beta_{n-1} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-1} \\ & \beta_0 & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^*_{k-1} \\ \vdots \\ \varphi^*_1 \\ \varphi^*_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \\ \beta_1 \\ \beta_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \eta_{k-1} \\ \eta_{k-2} \\ \vdots \\ \eta_1 \\ \eta_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{2.2.35}$$

2.3 Polynomansätze für die erweiterte Störungsregelung

Bisher wurde das Ziel der Reglersynthese [14] so gestellt, daß die Auswirkungen von Störungen mit Hilfe des Störmodellansatzes auf die Regelgröße $y_1(t)$ asymptotisch kompensiert werden. Im folgenden soll ein Ansatz vorgestellt werden, der es ermöglicht, zusätzlich zur Regelgröße $y_1(t)$ auch die Regelgröße $y_2(t)$ zu berücksichtigen [36].

2.3.1 Störkompensation für zwei Regelgrößen

Der Einfluß der Störgrößen $Z_j(s)$ für $j = 1,2,\ldots,\rho$ auf die Regelgrösse $Y_1(s)$ ist durch Gl.(2.1.11b) gegeben. Für $Y_2(s)$ läßt sich mit Gl. (2.1.5e) errechnen

$$G^j_{St2}(s) = \frac{Z^j_{St2}(s)N_R(s)N_S(s) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{m} Z_{Ri}(s)\,[Z_{S2}(s)Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St2}(s)Z_{Si}(s)]}{N_S(s)\,[N_R(s)\,N_S(s) - \sum_{i=1}^{m} Z_{Ri}(s)\,Z_{Si}(s)]} \tag{2.3.1}$$

Bei der Auslegung des Regelkreises für eine asymptotische Störkompensation von $Y_1(s)$ war ja bereits in Kapitel 2.1.1 gezeigt worden,

daß der Zähler der Störübertragungsfunktion $G^j_{St1}(s)$ das charakteristische Polynom der Stördynamik $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ enthalten muß. Für $G^j_{St2}(s)$ kann das nicht dadurch verwirklicht werden, daß $Z_{R1}(s)$ auch den Teiler $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ besitzt, denn in diesem Fall würde das Polynom $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ von $N_R(s)$ gekürzt werden. Damit dieser Fall ausgeschlossen wird, ist es erforderlich, daß $N_R(s)$,

$$S_1(s) = \sum_{i=2}^{m} Z_{Ri}(s)[Z_{S1}(s)\ Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St1}(s)\ Z_{Si}(s)] \qquad (2.3.2)$$

aus Gl.(2.1.11b) und

$$S_2(s) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 2}}^{m} Z_{Ri}(s)[Z_{S2}(s)\ Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St2}(s)\ Z_{Si}(s)] \qquad (2.3.3)$$

aus Gl.(2.3.1) den Teiler $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ multiplikativ enthalten muß. Nach [13] sind alle Polynome in den eckigen Klammern der Gln.(2.3.2) und (2.3.3) durch $N_S(s)$ teilbar oder verschwinden. Daraus lassen sich vier Fälle ableiten:

Fall 1: Im einfachsten Fall gilt für $i = 2$ in Gl.(2.3.2) und für $i = 1$ in Gl.(2.3.3)

$$Z_{S1}(s)\ Z^j_{St2}(s) - Z^j_{St1}(s)\ Z_{S2}(s) = 0. \qquad (2.3.4)$$

Hierin ist die zusätzliche Forderung, daß Störauswirkungen auf $Y_2(s)$ kompensiert werden, automatisch erfüllt, da $N_R(s)$ und $Z_{Ri}(s)$ für $i = 2,3,\ldots,m$ den Teiler $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ enthalten. Somit kann Gl.(2.2.16) angewendet werden. Die Gln.(2.3.2) und (2.3.3) lassen sich dann schreiben als

$$S_k(s) = \sum_{i=3}^{m} Z_{Ri}(s)[Z_{Sk}(s)\ Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{Stk}(s)\ Z_{Si}(s)],\ k = 1,2. \qquad (2.3.5)$$

Fall 2: Für diesen Fall werden die Gln.(2.3.2) und (2.3.3) in der Form

$$S_1(s) = \sum_{\substack{i=3 \\ i\neq k}}^{m} Z_{Ri}(s)\,[Z_{S1}(s)\,Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St1}(s)\,Z_{Si}(s)] +$$

$$+ Z_{Rk}(s)\,[Z_{S1}(s)\,Z^j_{Stk}(s) - Z^j_{St1}(s)\,Z_{Sk}(s)] \qquad (2.3.5)$$

und

$$S_2(s) = Z_{R1}(s)\,[Z_{S2}(s)\,Z^j_{St1}(s) - Z^j_{St2}(s)\,Z_{S1}(s)] +$$

$$+ \sum_{\substack{i=3 \\ i\neq k}}^{m} Z_{Ri}(s)\,[Z_{S2}(s)\,Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St2}(s)\,Z_{Si}(s)] +$$

$$+ Z_{Rk}(s)\,[Z_{S2}(s)\,Z^j_{Stk}(s) - Z^j_{St2}(s)\,Z_{Sk}(s)] \qquad (2.3.6)$$

dargestellt. Erfüllen die Polynome aus Gl.(2.3.5) die Bedingung

$$Z_{S1}(s)\,Z^j_{Stk}(s) - Z^j_{St1}(s)\,Z_{Sk}(s) = 0 \qquad (2.3.7)$$

und aus Gl.(2.3.6)

$$Z_{S2}(s)\,Z^j_{St1}(s) - Z^j_{St2}(s)\,Z_{S1}(s) = N_S(s)\,Z^j_{12}(s) \qquad (2.3.8)$$

sowie

$$Z_{S2}(s)\,Z^j_{Stk}(s) - Z^j_{St2}(s)\,Z_{Sk}(s) = N_S(s)\,Z^j_{k2}(s), \qquad (2.3.9)$$

so läßt sich hieraus die Beziehung

$$Z_{R1}(s)\,[Z_{S2}(s)\,Z^j_{St1}(s) - Z^j_{St2}(s)\,Z_{S1}(s)] +$$

$$+ Z_{Rk}(s)\,[Z_{S2}(s)\,Z^j_{Stk}(s) - Z^j_{St2}(s)\,Z_{Sk}(s)] =$$

$$N_S(s)\,[Z_{R1}(s)\,Z^j_{12}(s) + Z_{Rk}(s)\,Z^j_{k2}(s)]$$

$$N_S(s)\,\det(s\underline{I}-\underline{S})\,M(s) \qquad (2.3.10)$$

ableiten, wobei M(s) die zu ermittelnden Koeffizienten enthält.

Durch den Ansatz ist sichergestellt, daß $N_R(s)$ und $Z_{Ri}(s)$ für $i = 2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,m$ das Polynom $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ als Teiler enthalten. Entsprechend Gl.(2.2.15) werden die Grade der Polynome in Gl. (2.3.10) berücksichtigt und somit definiert:

$$Z^j_{12}(s) = r^{12}_o + r^{12}_1\, s + \ldots + r^{12}_{n-1}\, s^{n-1},$$

$$Z^j_{k2}(s) = r^{k2}_o + r^{k2}_1\, s + \ldots + r^{k2}_{n-1}\, s^{n-1},$$

$$\det(s\underline{I}-\underline{S}) = \psi_o + \psi_1\, s + \ldots + \psi_{q-1}\, s^{q-1} + s^q \qquad (2.3.11)$$

und

$$M(s) = m_o + m_1\, s + \ldots + m_{n+n_B-1}\, s^{n+n_B-1}.$$

Für die Synthese des Regelkreises sind die Gln.(2.2.1), (2.2.2) und (2.3.10) auszuwerten. Entsprechend den bisher gemachten Ansätzen werden die zu bestimmenden Reglerpolynome festgelegt als

$$N_R(s) = \det(s\underline{I}-\underline{S})(p_o + p_1\, s + \ldots + p_{n_B-1}\, s^{n_B-1} + s^{n_B})$$

$$Z_{R1}(s) = l^1_o + l^1_1\, s + \ldots + l^1_{n_B+q}\, s^{n_B+q}$$

$$Z_{Rk}(s) = l^k_o + l^k_1\, s + \ldots + l^k_{n_B+q}\, s^{n_B+q} \qquad (2.3.12)$$

und

$$Z_{Ri}(s) = \det(s\underline{I}-\underline{S})(l^i_o + l^i_1\, s + \ldots + l^i_{n_B}\, s^{n_B})$$

für $i = 2,3,\ldots\ k-1,\ k+1,\ \ldots\ m.$

Gl.(2.3.12) enthält $n_B+2(n_B+q+1)+(m-2)(n_B+1)$ Parameter des Zustandsreglers und $(n_B+q+n)+(2n+n_B+q-1)$ Gleichungen.

Die charakteristische Gleichung des Regelkreises, die aus den Gln. (2.2.1) und (2.2.2) besteht, liefert nach Durchführung des Koeffizientenvergleichs analog zu Gl.(2.2.16) das Berechnungsschema

$$\underline{K}_h^1 \cdot \underline{h}^1 = \underline{B}_\varphi \cdot \underline{\varphi} + \underline{\delta} - \underline{B}_\psi \cdot \underline{\psi}, \tag{2.3.13}$$

wobei der Reglerkoeffizientenvektor $\underline{h}^1$ gegeben ist durch

$$\underline{h}^{1T} = [p_{n_B-1}, p_{n_B-2}, \ldots, p_o \,|\, -l^1_{n_B+q}, \ldots, -l^1_1, -l^1_o \,|$$
$$|\, -l^k_{n_B+q}, \ldots, -l^k_1, -l^k_o \,|\, -l^2_{n_B}, \ldots, -l^2_1, -l^2_o \,| \ldots$$
$$\ldots |\, -l^m_{n_B}, \ldots, -l^m_1, -l^m_o]. \tag{2.3.14}$$

Die Koeffizienten α_i aus Gl.(2.2.13) und γ_i^j aus Gl.(2.2.14) sind identisch zu Kapitel 2.2. Ebenso entsprechen $\underline{B}_\varphi$, $\underline{\varphi}$, $\underline{\delta}$, $\underline{B}_\psi$ und $\underline{\psi}$ denen aus Gl.(2.2.16). Für die Matrix $\underline{K}_h^1$ ist jedoch nach Gl.(2.2.10) zu berücksichtigen, daß $Z_{Rk}(s)$ das Polynom $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ nicht multiplikativ enthalten darf und somit gilt

$$N_S(s)\,\det(s\underline{I}-\underline{S})\,N'_R(s) - Z_{S1}(s)\,Z_{R1}(s) - Z_{Sk}(s)\,Z_{Rk}(s) - \sum_{\substack{i=2 \\ i\neq k}}^{m} Z_{Si}(s)\,Z_{Ri}$$
$$= P_{STR}(s)\,\hat{P}_B(s). \tag{2.3.15}$$

Die Matrix $\underline{K}_h$ aus Gl.(2.2.16) muß also um den Anteil ergänzt werden, der durch die Koeffizienten des Polynoms $Z_{Sk}(s)$ entsteht. In Analogie zu Gl.(2.2.20) erhält man für Gl.(2.3.13) die Matrix

$$\underline{K}_h^1 = [\underline{\alpha} \mid \underline{c}^1 \mid \underline{c}^k \mid \underline{\gamma}^2 \mid \ldots \mid \underline{\gamma}^m] \tag{2.3.16}$$

mit

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ \alpha_{n+q-1} & 1 & & \underline{0} \\ \alpha_{n+q-2} & \alpha_{n+q-1} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_o & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n_B-1} \\ 0 & \alpha_o & \ddots & \\ & 0 & & \\ \underline{0} & & & \alpha_o \end{bmatrix}, \tag{2.3.16a}$$

$$\underline{c}^i = \begin{bmatrix} c^i_{n-1} & 0 & & \\ c^i_{n-2} & c^i_{n-1} & & \underline{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ c^i_0 & c^i_1 & \cdots & c^i_{n_B+q} \\ 0 & c^i_0 & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & c^i_0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \; k \qquad (2.3.16b)$$

und

$$\underline{\gamma}^j = \begin{bmatrix} \gamma^j_{n+q-1} & & & \\ \gamma^j_{n+q-2} & \gamma^j_{n+q-1} & & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \gamma^j_0 & \gamma^j_1 & & \\ 0 & \gamma^j_0 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \\ \underline{0} & & & \gamma^j_0 \end{bmatrix}, \quad j = 2, \; \ldots, \; m. \qquad (2.3.16c)$$

Für die Auswertung der Gln.(2.3.8) und (2.3.9), die in der Form

$$N_S(s) \; Z^j_{12}(s) = Z_{S2}(s) \; Z^j_{St1}(s) - Z_{S1}(s) \; Z^j_{St2}(s) \qquad (2.3.17)$$

bzw.

$$N_S(s) \; Z^j_{k2}(s) = Z_{S2}(s) \; Z^j_{Stk}(s) - Z_{Sk}(s) \; Z^j_{St2}(s) \qquad (2.3.18)$$

geschrieben werden können, werden die Polynome $Z^j_{Sti}(s)$ entsprechend Gl.(2.2.12) definiert als

$$Z^{j}_{Sti}(s) = d^{ji}_{o} + d^{ji}_{1}\, s \ldots . d^{ji}_{n}\, s^{n}. \tag{2.3.19}$$

Die Koeffizienten der Polynome $Z^{j}_{12}(s)$ und $Z^{j}_{k2}(s)$ aus Gl.(2.3.11) lassen sich in allgemeiner Weise als Vektor

$$\underline{r}^{ji^{T}} = [r^{ji}_{n-1},\ r^{ji}_{n-2},\ \ldots,\ r_{o}] \tag{2.3.20}$$

für ji = 12 und ji = k2 darstellen. In gleicher Weise werden die Koeffizienten von Gl.(2.3.19) zusammengefaßt als

$$\underline{d}^{ji^{T}} = [d^{ji}_{n},\ d^{ji}_{n-1},\ \ldots,\ d^{ji}_{o}]. \tag{2.3.21}$$

Mit Hilfe von Gl.(2.3.16b) für i = 1,2,k und

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \underline{0} \\ a_{n-1} & 1 & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{o} & a_{1} & \ldots & a_{n-1} \\ 0 & a_{o} & \ddots & \\ & 0 & & \\ \underline{0} & & & a_{o} \end{bmatrix} \tag{2.3.22}$$

lassen sich die Gln.(2.3.17) und (2.3.18) in Koeffizientenschreibweise formulieren als

$$\underline{a}\cdot\underline{r}^{12} = \underline{c}^{2}\ \underline{d}^{j1} - \underline{c}^{1}\ \underline{d}^{j2} \tag{2.3.23}$$

und

$$\underline{a}\cdot\underline{r}^{k2} = \underline{c}^{2}\ \underline{d}^{jk} - \underline{c}^{k}\ \underline{d}^{j2}, \tag{2.3.24}$$

wobei vorausgesetzt bleibt, daß die rechten Seiten von Gl.(2.3.17) und Gl.(2.3.18) durch $N_S(s)$ teilbar sind. Die Lösung von Gl.(2.3.10)

wird so vorgenommen, daß Gl.(2.3.10) in die Form

$$Z_{12}^{j}(s)\ Z_{R1}(s) + Z_{k2}^{j}(s)\ Z_{Rk}(s) - \det(s\underline{I}-\underline{S})\ M(s) = 0 \qquad (2.3.25)$$

gebracht wird und die Koeffizienten der Polynome $Z_{R1}(s)$, $Z_{Rk}(s)$ nach Gl.(2.3.12) und M(s) nach Gl.(2.3.11) im Vektor

$$\underline{h}_M^T = [-l_{n_B+q}^1, \ldots, -l_1^1, l_o^1 \,\vdots\, -l_{n_B+q}^k, \ldots, -l_1^k, -l_o^k \,\vdots\, m_{n+n_B-1}, \ldots, m_1, m_o]$$

zusammengefaßt werden. Das Rechenschema für Gl.(2.3.25) lautet somit

$$[\underline{R}^{12}, \underline{R}^{k2}, \underline{\psi}] \cdot \underline{h}_M = \underline{0} \qquad (2.3.26)$$

mit

$$\underline{R}^{ij} = \begin{bmatrix} r_{n-1}^{12} & 0 & & \underline{0} \\ r_{n-2}^{12} & r_{n-1}^{12} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ r_o^{12} & r_1^{12} & & \\ 0 & r_o^{12} & \ddots & \\ & 0 & & \\ \underline{0} & & & r_o^{12} \end{bmatrix} \quad \text{für } ij = 12,\ k2 \qquad (2.3.26a)$$

und

$$\underline{\Psi}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ & & \underline{0} \\ \psi_{q-1} & 1 & \ddots \\ \vdots & \psi_{q-1} & 1 \\ \psi_0 & \vdots & \vdots \\ & \psi_0 & \ddots \\ \underline{0} & & \psi_0 \end{bmatrix}. \tag{2.3.26b}$$

Die Gln.(2.3.13) und (2.3.26) können zusammengefaßt werden zu

$$\underline{K}_h \; \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{B}\varphi \end{bmatrix} \underline{\varphi} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\delta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{B}_\psi \end{bmatrix} \underline{\Psi}', \tag{2.3.27}$$

wobei die Gln.(2.3.16) und (2.3.22) berücksichtigt werden. Für die linke Seite von Gl.(2.3.27) folgt somit

$$\underline{K}_h = \begin{bmatrix} \underline{0}, \; \underline{R}^{12}, \; \underline{0}, \; \underline{0}, \; \underline{0}, \; \ldots \; \underline{0}, \; \underline{\psi}' \\ \underline{\alpha}, \; \underline{c}^1, \; \underline{c}^k, \; \underline{\gamma}^2, \; \underline{\gamma}^3, \; \ldots, \; \underline{\gamma}^m, \; \underline{0} \end{bmatrix} \tag{2.3.28}$$

und

$$\underline{h}^T = [\underline{h}^{1T}, \; \underline{m}^T]. \tag{2.3.29}$$

Mit den gemachten Ansätzen ist $\underline{K}_h$ eine Matrix der Dimension $dy = 2(n + n_B + q) \times (2\, n_B + 2q + n + m(n_B+1)) = dx$. Für $dx \geq dy$, d. h. für $m(n_B+1) \geq n$ können $m(n_B+1)-n$ Parameter beliebig gewählt werden.

Fall 3: Hierfür werden die Gln.(2.3.2) und (2.3.3) geschrieben als

$$S_1(s) = Z_{R2}(s) \cdot [Z_{S1}(s)\; Z^j_{St2}(s) - Z^j_{St1}(s)\; Z_{S2}(s)]$$

$$+ \sum_{i=3}^{m} Z_{Ri}(s)\; [Z_{S1}(s)\; Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St1}(s)\; Z_{Si}(s)] \tag{2.3.30}$$

und

$$S_2(s) = Z_{R1}(s)\ [Z_{S2}(s)\ Z^j_{St1} - Z^j_{St2}(s)\ Z_{S1}(s)]$$

$$+ \sum_{i=3}^{m} Z_{Ri}(s)\ [Z_{S2}(s)\ Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St2}(s)\ Z_{Si}(s)]. \qquad (2.3.31)$$

In diesem Gleichungssystem wird berücksichtigt

$$Z_{S1}(s)\ Z^j_{St2}(s) - Z^j_{St1}(s)\ Z_{S2}(s) \neq 0 \qquad (2.3.32)$$

und

$$Z_{S2}(s)\ Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St2}(s)\ Z_{Si}(s) = 0 \quad \text{für } i = 3, \ldots, m\,. \qquad (2.3.33)$$

Weiterhin wird für den Summenterm in Gl.(2.3.30) gefordert, daß mindestens ein Polynom mit der Eigenschaft

$$Z_{S1}(s)\ Z^j_{Stk}(s) - Z^j_{St1}(s)\ Z_{Sk}(s) \neq 0 \qquad (2.3.34)$$

existiert. Mit diesen Bedingungen ist

$$S_1(s) = Z_{R2}(s)\ [Z_{S1}(s)\ Z^j_{St2}(s) - Z^j_{St1}(s)\ Z_{S2}(s)]$$

$$+ Z_{Rk}(s)\ [Z_{S1}(s)\ Z^j_{Stk}(s) - Z^j_{St1}(s)\ Z_{Sk}(s)] \qquad (2.3.35)$$

und

$$S_2(s) = Z_{R1}(s)\ [Z_{S2}(s)\ Z^j_{St1}(s) - Z^j_{St2}(s)\ Z_{S1}(s)]. \qquad (2.3.36)$$

Gl.(2.3.35) kann nun entsprechend Gl.(2.3.10) mit dem Ansatz

$$S_1(s) = N_S(s)\ \det(s\underline{I} - \underline{S})\ M(s) \qquad (2.3.37)$$

wie im Fall 2 gelöst werden, wenn berücksichtigt wird, daß die Polynome

$$Z_{R2}(s) = l^2_o + l^2_1\ s + \ldots\ l^2_{n_B+q}\ s^{n_B+q} \qquad (2.3.38)$$

und

$$Z_{Rk}(s) = l_o^k + l_1^k\, s + \ldots\, l_{n_B+q}^k\, s^{n_B+q} \tag{2.3.39}$$

der $s\underline{I}-\underline{S}$ nicht als Teiler enthalten dürfen. Im Gegensatz dazu gilt

$$Z_{R1}(s) = \det(s\underline{I}-\underline{S})\; Z'_{R1}(s). \tag{2.3.40}$$

Fall 4: In Ergänzung zu Fall 3 wird zusätzlich zu Gl.(2.3.33), entsprechend Gl.(2.3.30), angenommen, daß

$$Z_{S1}(s)\; Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St1}(s)\; Z_{Si}(s) = 0 \quad \text{für } i = 3,\ldots,m \tag{2.3.41}$$

gilt. Hiermit erhält man die Polynome

$$S_1(s) = Z_{R2}(s)\; [Z_{S1}(s)\; Z^j_{St2}(s) - Z^j_{St1}(s)\; Z_{S2}(s)] \tag{2.3.42}$$

und

$$S_2(s) = Z_{R1}(s)\; [Z_{S2}(s)\; Z^j_{St1}(s) - Z^j_{St2}(s)\; Z_{S1}(s)]. \tag{2.3.43}$$

Zusätzlich zu den genannten Bedingungen kann nun geprüft werden, ob $Z^j_{St1}(s) \neq 0$ und $Z^j_{St2}(s) \neq 0$ oder umgekehrt erfüllt ist. In diesen Fällen stellen sich die Störübertragungsfunktionen wie folgt dar:

$$\frac{Y_{1z}(s)}{Z_j(s)} = \frac{Z_{R2}(s)\; Z_{S1}(s)\; Z^j_{St2}(s)}{N_S(s)\; [N_R(s)\; N_S(s) - \sum_{i=1}^{m} Z_{Ri}(s)\; Z_{Si}(s)]} \tag{2.3.44}$$

und

$$\frac{Y_{2z}(s)}{Z_j(s)} = \frac{Z^j_{St2}(s)\; [N_R(s)\; N_S(s) - Z_{R1}(s)\; Z_{S1}(s)]}{N_S(s)\; [N_R(s)\; N_S(s) - \sum_{i=1}^{m} Z_{Ri}(s)\; Z_{Si}(s)]}\,. \tag{2.3.45}$$

Gl.(2.3.44) zeigt, daß hier darauf verzichtet werden kann, daß $N_R(s)$ den Teiler $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ enthält und mit Gl.(2.3.45) wie in Fall 2 die Regler entworfen werden können. Ist allerdings die Bedingung

$Z^j_{St1}(s) = 0$ und $Z^j_{St2}(s) \neq 0$ und umgekehrt nicht erfüllt, so kann die ursprüngliche Forderung nach asymptotischer Kompensation der Störung auf $Y_1(s)$ und $Y_2(s)$ nicht gleichzeitig erfüllt werden.

2.3.2 Die Reduzierung der Ordnung des Zustandsreglers unter Berücksichtigung des Führungsverhaltens

Die bisher als "Entwurfsverfahren von Zustandsreglern minimaler Ordnung" benannte Methode zur Reglersynthese im Frequenzbereich wurde in den bisherigen Kapiteln so vorgenommen, daß der Zustandsregler (n_B+q)-ter Ordnung für die Störkompensation von $Y_1(s)$ bzw. $Y_1(s)$ und $Y_2(s)$ entworfen wurde. Durch Wahl der n_B+q+1 freien Parameter in $Z_{RW}(s)$ kann bei Festlegung des Führungsverhaltens dafür gesorgt werden, daß die Übertragungsfunktion $\frac{E(s)}{W(s)}$ nach Gl. (2.1.13) das Polynom $\det(s\underline{I}-\underline{W})$ als Teiler enthält. Die Frage ist jedoch, ob die Ordnung des Zustandsreglers (n_B+q) weiter reduziert werden kann. Es wird sich zeigen, daß die Behandlung im Frequenzbereich ermöglicht, einen Zustandsregler der Ordnung n_B zu wählen. Mit der vorhandenen Anzahl freier Parameter ist es somit möglich, Bedingungen für den geschlossenen Regelkreis zu formulieren und die Forderung, daß die Störübertragungsfunktion $\frac{Y_{1z}(s)}{Z_j(s)}$ den Teiler $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ enthalten soll, zu erfüllen. Dies ist insbesondere dann möglich, wenn in $\frac{Y_{1z}(s)}{Z_j(s)}$ nach Gl.(2.1.11b) einige Polynome

$$P^j_{Zi}(s) = Z_{S1}(s)\; Z^j_{Sti}(s) - Z^j_{St1}(s)\; Z_{Si}(s) \quad \text{für } i = 2,3,\ldots,m \tag{2.3.46}$$

identisch Null sind. Für die entsprechenden $Z_{Ri}(s)$ entfällt somit die Bedingung, daß $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ ein Teiler sein soll. Sind in $P^j_{Zi}(s)$ $(r-1)$ Polynome identisch Null, so kann durch einfache Umnumerierung der Ausgangsgrößen definiert werden

$$P^j_{Zi}(s) = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 2,3,\ldots,r \\ N_S(s)\; Z^j_i(s) & \text{für } i = r+1,\ldots,m\,. \end{cases} \tag{2.3.47}$$

Hierzu entsprechend müssen nun die Ansätze für die Störübertragungsfunktion neu modifiziert werden. Für den Zustandsregler wird als Ordnung n_r festgelegt. Folglich muß für $N_R(s)$ angesetzt werden

$$N_R(s) = \det(s\underline{I}-\underline{S})\ N'_R(s), \tag{2.3.48}$$

wobei hier das Polynom $N'_R(s)$ den Grad n_r-q besitzt und definiert wird als

$$N'_R(s) = q_o + q_1\ s + \ldots + q_{n_r-q-1}\ s^{n_r-q-1} + s^{n_r-q}. \tag{2.3.49}$$

Die Bedingung, daß $\frac{Y_{1z}(s)}{Z_j(s)}$ den Teiler $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ für eine Störkompensation von $Y_1(s)$ enthalten muß, impliziert auch hier

$$Z_{Ri}(s) = \det(s\underline{I}-\underline{S})\ Z'_{Ri}(s)$$

mit

$$Z'_{Ri}(s) = l^i_o + l^i_1\ s + \ldots + l^i_{n_r-q}\ s^{n_r-q} \quad \text{für } i = r+1, \ldots, m. \tag{2.3.50}$$

Werden die Gln.(2.3.46) bis (2.3.50) in Gl.(2.1.11b) eingesetzt, so erhält man die Störübertragungsfunktion

$$\frac{Y_{1z}(s)}{Z_j(s)} = \frac{\det(s\underline{I}-\underline{S})\ [Z^j_{St1}(s)\ N'_R(s) + \sum_{i=r+1}^{m} Z'_{Ri}(s)\ Z^j_i(s)]}{\det(s\underline{I}-\underline{S})\,[N'_R(s)N_S(s) - \sum_{i=r+1}^{m} Z'_{Ri}(s)Z_{Si}(s)] - \sum_{i=1}^{r} Z_{Ri}(s)Z_{Si}(s)} \tag{2.3.51}$$

Die Zählerpolynome, die $\det(s\underline{I}-\underline{S})$ nicht als Teiler enthalten, lauten in allgemeiner Form

$$Z_{Ri}(s) = l^i_o + l^i_1\ s + \ldots + l^i_{n_r}\ s^{n_r} \quad \text{für } i = 1,2,\ldots,r. \tag{2.3.52}$$

Das Zählerpolynom des Vorfilters, ebenfalls n_r-ten Grades, wird für die Auslegung des Regelkreises als

$$Z_{RW}(s) = l_o^W + l_1^W s + \ldots + l_{n_r}^W s^{n_r} \tag{2.3.53}$$

festgelegt.

Die Auslegung des Regelkreises wird so vorgenommen, daß das charakteristische Polynom

$$P_c(s) = N_R(s)\, N_S(s) - \sum_{i=1}^{m} Z_{Ri}(s)\, Z_{Si}(s) = P_{STR}(s)\, \hat{P}_B(s) \tag{2.3.54}$$

unter Berücksichtigung der Gln.(2.2.1) und (2.2.2) bei Vorgabe von $P_{STR}(s)$ und $\hat{P}_B(s)$ durch Koeffizientenvergleich erfüllt wird. Da als Ordnung des Zustandsreglers in Gl.(2.3.48) n_r festgelegt wurde, besitzt das charakteristische Polynom den Grad n_r+n und somit $\hat{P}_B(s)$ auch den Grad n_r. Wie sich aus den Gln.(2.3.49), (2.3.50) und (2.3.52) ablesen läßt, sind für Gl.(2.3.54)

$$n_r - q + (m-r)(n_r - q + 1) + r(n_r + 1) = n_r(1+m) - q(1+m-r) + m \tag{2.3.55}$$

Reglerkoeffizienten zu bestimmen. Diesen unbekannten bzw. frei wählbaren Koeffizienten stehen bei Durchführung des Koeffizientenvergleichs genau $n+n_r$ Gleichungen gegenüber. Zur Festlegung der Ordnung des Zustandsreglers ist zusätzlich noch die Bedingung

$$n_r \geq \nu - 1, \tag{2.3.56}$$

die bereits in Abschnitt 2.1 eingeführt wurde, zu fordern. ν ist der Beobachtbarkeitsindex der Regelstrecke. Außerdem enthält Gl. (2.3.49) die Bedingung

$$n_r \geq q\,. \tag{2.3.57}$$

Bei $n+n_r$ Gleichungen und der durch Gl.(2.3.55) gegebenen Anzahl von zu bestimmenden oder frei zu wählenden Reglerparametern gilt

$$n_r \geq \frac{n}{m} + q - 1 - \frac{(r-1)q}{m} \quad . \tag{2.3.58}$$

Mit Gl.(2.3.51) kann die Synthesegleichung (2.3.54) geschrieben werden als

$$P_c(s) = N_R'(s)\ \det(s\underline{I}-\underline{S})\ N_S(s) - \sum_{i=1}^{r} Z_{Ri}(s)\ Z_{Si}(s)$$

$$- \sum_{i=r+1}^{m} Z_{Ri}'(s)\ \det(s\underline{I}-\underline{S})\ Z_{Si}(s)$$

$$= P_{STR}(s)\cdot\hat{P}_B(s). \tag{2.3.58}$$

Der besseren Übersichtlichkeit wegen sollen die übrigen, zur Lösung der Gl.(2.3.58) notwendigen Polynomansätze noch einmal zusammengefaßt dargestellt werden:

$$P_{STR}(s) = \beta_o + \beta_1\ s + \ldots\ \beta_{n-1}\ s^{n-1} + s^n,$$

$$N_S(s) = a_o + a_1\ s + \ldots\ a_{n-1}\ s^{n-1} + s^n,$$

$$Z_{Si}(s) = c_o^i + c_1^i\ s + \ldots\ c_{n-1}^i\ s^{n-1} \quad \text{für } i = 1,2,\ldots,m,$$

$$\det(s\underline{I}-\underline{S}) = \psi_o + \psi_1\ s + \ldots\ \psi_{q-1}\ s^{q-1} + s^q.$$

Die Lösung von Gl.(2.3.58) kann nun in Analogie zu Gl.(2.2.16) und Gl.(2.2.33) mit einem entsprechenden Rechenschema vorgenommen werden. Nach Definition des Lösungsvektors, der aus den zu bestimmenden Reglerparametern nach Gln.(2.3.49), (2.3.50) und (2.3.51) besteht, kann nach Durchführung des Koeffizientenvergleichs für Gl. (2.3.58) wiederum geschrieben werden

$$\hat{\underline{K}}_h\cdot\hat{\underline{h}} = \underline{B}_\varphi\cdot\hat{\underline{\varphi}} + \underline{\delta} - \underline{B}_\psi\cdot\underline{\psi}, \tag{2.3.59}$$

wobei hier im Vergleich mit Gl.(2.2.16) und Gl.(2.2.33) die Matrix $\underline{K}_n$ und die Vektoren $\underline{h}$ und $\underline{\varphi}$ modifiziert werden müssen. Nach dem Zusammenfassen der Reglerparameter ergibt sich somit

$$\underline{\hat{h}}^T = [q_{n_r-q-1}, \ldots, q_1, q_o \,|\, -l^1_{n_r}, \ldots, -l^1_1, -l^1_o \,|\, \ldots$$

$$\ldots \,|\, -l^r_{n_r}, \ldots, -l^r_1, -l^r_o \,|\, -l^{r+1}_{n_r-q}, \ldots, -l^{r+1}_1, -l^1_o \,|\, \ldots$$

$$\ldots \,|\, -l^m_{n_r-q}, \ldots, -l^m_1, -l^m_o]. \qquad (2.3.60)$$

Die Koeffizientenmatrix ist demnach

$$\underline{\hat{K}}_h = [\underline{\alpha} \mid \underline{c}^1 \mid \underline{c}^2 \mid \ldots \mid \underline{c}^r \mid \underline{\gamma}^{r+1} \mid \ldots \mid \underline{\gamma}^m]. \qquad (2.3.61)$$

Die Matrix $\underline{\alpha}$ besteht aus den Koeffizienten des Polynoms $N_S(s)\det(s\underline{I}-\underline{S}$ wobei die Struktur von Gl.(2.3.16a) erhalten bleibt und für n_B nur n_r-q eingesetzt werden muß. $\underline{\alpha}$ hat also n_r-q Spalten und $(n+n_r)$ Zeilen. Die Matrizen $\underline{\gamma}^i$ für $i = r+1,\ldots,m$ sind die Koeffizienten des Polynoms $Z_{Si}(s)\cdot\det(s\underline{I}-\underline{S})$ und unterscheiden sich von Gl. (2.3.16c) nur dadurch, daß sie n_r-q+1 Spalten aufweisen. Die Koeffizienten der Zählerpolynome $Z_{Si}(s)$ für $i = 1,2,\ldots,m$ tauchen in den Matrizen $\underline{c}^i$ auf, die wie Gl.(2.3.16b) strukturiert sind, jedoch nur, der Anzahl der Reglerparameter entsprechend, jeweils n_r+1 Spalten besitzen. Der Vektor, der die Koeffizienten von $\hat{P}_B(s)$ enthält, ist in diesem Fall

$$\underline{\hat{\varphi}}^T = [\hat{\varphi}_{n_r-1}, \ldots, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_o]. \qquad (2.3.62)$$

Die Matrizen $\underline{B}_\varphi$, $\underline{B}_\Psi$ und die Vektoren $\underline{\xi}$ und $\underline{\psi}$ sind entsprechend den Gln.(2.2.21) bis (2.2.23) und der Anzahl der festzulegenden Reglerkoeffizienten zu bestimmen.

2.4 Beispiel zum Entwurf von Zustandsreglern im Frequenzbereich mit Stör- und Führungsmodellansatz

Die Teilübertragungsfunktionen der Regelstrecke aus [36] sind

$$G_{S1}(s) = \frac{(s-2)(s+0.5)}{s(s+2)(s-1)^2} = \frac{-1-1.5s+s^2}{2s-3s^2+s^4} = \frac{c^1_o+c^1_1 s+c^1_2 s^2}{a_o+a_1 s+a_2 s^2+a_3 s^3+s^4} = \frac{Z_{S1}(s)}{N_S(s)}$$

und

$$G_{St2}(s) = \frac{s\,s-2)\,(s+2)}{s\,(s+2)\,(s-1)^2} = \frac{-4s+s^3}{N_S(s)} = \frac{c_o^2 - c_1^2 s + c_2^2 s^2 + c_3^2 s^3}{N_S(s)} = \frac{Z_{S2}(s)}{N_S(s)} .$$

Das Störverhalten ist charakterisiert durch

$$G^1_{St1}(s) = \frac{s(s-1)^2(s+0.5)}{N_S(s)} = \frac{0.5s - 1.5\,s^3 + s^4}{N_S(s)}$$

$$= \frac{d_o^{11} + d_1^{11} s + d_2^{11}\, s^2 + d_3^{11}\, s^3 + d_4^{11}\, s^4}{N_S(s)} = \frac{Z^1_{St1}(s)}{N_S(s)}$$

und

$$G^1_{St2}(s) = \frac{Z_{St2}(s)}{N_S(s)} = 0 .$$

Die charakteristische Gleichung des Störmodells berücksichtigt sowohl sprung- als auch sinusförmige Störungen mit der Frequenz $\omega = 2/\text{sec}$ und ist somit

$$\det(s\underline{I} - \underline{S}) = s(s^2+4) = 4s + s^3 = \psi_o + \psi_1 s + \psi_2\, s^2 + s^3 .$$

Als Führungsgrößen sind sowohl sprung- als auch rampenförmige Signale zugelassen, die bewirken, daß das Führungsmodell als

$$\det(s\underline{I} - \underline{W}) = s^2 = \eta_o + \eta_1 s + s^2$$

darstellbar ist. Als Polvorgabe für das charakteristische Polynom

$$P_C(s) = P_{STR}(s)\; P_{STM}(s)\; P_B(s),$$

nach Gl. 2.2.2), des geschlossenen Regelkreises wird gewählt

$$P_{STR}(s) = (s-2)^2(s^2-s+1) = 4-8s+9s^2-5s^3+s^4 = \beta_o + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \beta_3 s^3 + s^4$$

$$P_{STM}(s) = (s+3)^3 = 27 + 27s + 9s^2 + s^3 = \beta^1_o + \beta^1_1 s + \beta^1_2 s^2 + s^3$$

und

$$P_B(s) = (s+3)^2 = 9 + 6s + s^2 = \varphi_o^1 + {}_1^1 s + s^2.$$

Die Polynome $P_{STM}(s)$ und $P_B(s)$ werden mit Hilfe von Gl.(2.2.6) zusammengefaßt zu

$$\hat{P}_B(s) = P_{STM}(s) \cdot P_B(s) = (s+3)^5 = 243 + 405s + 270s^2 + 90s^3 + 15s^4 + s$$

$$= \varphi_o + \varphi_1 s + \varphi_2 s^2 + \varphi_3 s^3 + \varphi_4 s^4 + s^5.$$

Für die gemachten Ansätze gilt also: $n = 4$, $n_B = 2$, $q = 3$, $m = 2$ und $k = 2$. Zuerst erfolgt hier der Reglerentwurf so, wie er allgemein in den Kapiteln 2.1.1 und 2.2 beschrieben wurde. Dies setzt die Berechnung der Koeffizienten der Polynome $N_S(s) \cdot \det(s\underline{I} - \underline{S})$ und $Z_{S2}(s)$ $\det(s\underline{I} - \underline{S})$ unter Berücksichtigung der Gln.(2.2.13), (2.2.14), (2.2.18) und (2.2.19) voraus. Als Ergebnis erhält man

$$[\gamma_6^2,\ \gamma_5^2,\ \gamma_4^2,\ \gamma_3^2,\ \gamma_2^2,\ \gamma_1^2,\ \gamma_o^2]$$

$$= [1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -16,\ 0,\ 0]$$

und

$$[\alpha_6,\ \alpha_5,\ \alpha_4,\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_o]$$

$$= [0,\ 1,\ 2,\ -12,\ 8,\ 0,\ 0].$$

Gl.(2.2.17) gibt bereits die zu bestimmenden Reglerkoeffizienten an, so daß die Matrix $\underline{K}_h$ mit den angegebenen Zahlenwerten unter Berücksichtigung von Gl.(2.2.20) lautet:

$$\underline{K}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & -1 & -1.5 & 1 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 8 & -12 & 0 & 0 & -1 & -1.5 & 1 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1.5 & 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die rechte Seite von Gl.(2.2.16) ergibt nach Einsetzen aller Zahlenwerte in die Gln. (2.2.21), (2.2.22) und (2.2.23) den Vektor

[illegible]

$$= [20,\ 173,\ 861,\ 2701,\ 5470,\ 7380,\ 6507,\ 3564,\ 972] .$$

Das Berechnungsschema zeigt, daß für die 11 zu bestimmenden Reglerparameter aus Gl.(2.2.17) genau $n+n_B+q=9$ Gleichungen zur Verfügung stehen. Die 2 frei wählbaren Reglerkoeffizienten werden so gewählt, daß das Zählerpolynom $Z_{R1}(s)$ von $G_{R1}(s)$ und $Z_{R2}(s)$ von $G_{R2}(s)$ jeweils als maximale Potenz in s $n_B+q-1=4$ bzw. $n_B-1=1$ besitzt. Das hat zur Folge

[illegible] $= 0$.

Die numerische Auswertung ergibt schließlich die Reglerübertragungsfunktionen

$$G_{R1}(s) = \frac{Z'_{R1}(s)}{\det(s\underline{I}-\underline{S})\ N'_R(s)} = \frac{972 + 2106s - 597s^2 - 436.65s^3 - 271.5s^4}{s(s^2+4)(2690 + 20s + s^2)}$$

und

$$G_{R2}(s) = \frac{Z'_{R2}(s)}{N'_R(s)} = \frac{-1112.5 + 2517s}{2690 + 20s + s^2} .$$

Beim Entwurf des Vorfilters ist zu berücksichtigen, daß $k = 2 < n_B+q = 2+3$ gilt. Somit können die $n_B+q+1=6$ freien Parameter in $Z_{RW}(s)$ so gewählt werden, daß 1 Parameter für sprungförmige Führungsmodelle, $k=2$ Parameter für $\det(s\underline{I}-\underline{W})$ und die Differenz, also 3 Parameter, für die Kompensation einiger Wurzeln von

[illegible]

mit Hilfe von $\Delta a(s)$ verwendet werden.

Wird

$$\Delta a(s) = (s+3)^3 = 27 + 27s + 9s^2 + s^3$$

gewählt, so folgt daraus

$$\Delta f(s) = (s+3)^2 = 9 + 6s + s^2 = \varphi_o^* + \varphi_1^* s + s^2.$$

Die Lösung von Gl.(2.2.29a), d. h. die Bestimmung von $\tilde{Z}_{RW}(s)$ und $RP(s)$, wird nun mit Hilfe des Berechnungsschemas nach Gl.(2.2.33) vorgenommen. Dies ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_2 \\ \nu_1 \\ \nu_o \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 9 & 5 \\ 8 & 9 \\ 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

womit die Übertragungsfunktion des Vorfilters lautet

$$G_{RW}(s) = \frac{Z_{RW}(s)}{N_R(s)} = \frac{\tilde{Z}_{RW}(s)\ \Delta a(s)}{\det(s\underline{I}-\underline{S})\ N_R'(s)} = -\frac{(36 + 42s + 106s^2)\ (s+3)^3}{s(s^2+4)\ (2690 + 20s + s^2)}.$$

Da insbesondere die Übertragungsfunktionen $\frac{Y_{1Z}(s)}{Z_j(s)}$ (Gl.2.1.11b) und $\frac{E(s)}{W(s)}$ (Gl. 2.1.13) die zentralen Ausgangspunkte für die Reglersynthese waren, ist in den folgenden Bildern jeweils die Regelabweichung $e(t) = w(t) - y_1(t)$ in Abhängigkeit von verschiedenen Stör- und Führungssignalen dargestellt. Das Führungsverhalten für sprung- und rampenförmige Eingangssignale ist in Bild 2.4.1 dargestellt. Das durch den Ansatz des Störmodells $\det(s\underline{I}-\underline{S}) = s(s^2+4)$ geforderte Störmodell berücksichtigt sowohl sprungförmige als auch sinusförmige Störungen. Wie das Bild 2.4.2 zeigt, werden Störungen dieser Art asymptotisch ausgeregelt.

Die Bedingungen für den Entwurf eines ordnungsreduzierten Zustandsreglers sind einerseits durch die Gl.(2.3.46) und andererseits durch die Ungleichungen (2.3.56) bis (2.3.58) gegeben. Die erste Bedingung

$$P_{Z2}(s) = Z_{S1}(s)\ Z_{St2}(s) - Z_{St1}(s)\ Z_{S2}(s)$$

$$= -s^2(s-1)^2\ (s+0.5)\ (s-2)\ (s+2) \neq 0$$

liefert $r-1 = 0$, während die Ungleichungen für $\nu = 3$

$$n_r \geq \nu - 1 = 2,$$

$$n_r \geq q = 3$$

und

$$n_r \geq \frac{n}{m} + q - 1 - \frac{(r-1)q}{m} = 4$$

die Ordnung $n_r = 4$ des Zustandsreglers festlegen.

Da im charakteristischen Polynom $P_C(s) = P_{STR}(s)\ \hat{P}_B(s)$ das Polynom $P_{STR}(s)$ bereits festgelegt ist und der Grad des Polynoms $P_C(s)$ durch $N_R(s)$ und $N_S(s)$ bestimmt wird, kann $\hat{P}_B(s)$ ebenfalls um 1 reduziert angesetzt werden, also

$$\hat{P}_B(s) = (s+3)^4 = 81 + 108s + 54s^2 + 12s^3 + s^4$$

$$= \hat{\varphi}_0 + \hat{\varphi}_1 s + \hat{\varphi}_2 s^2 + \hat{\varphi}_3 s^3 + s^4.$$

Im Gegensatz zu Gl.(2.2.17) sind statt 11 nur 8 Reglerparameter zu bestimmen. Diese sind in Gl.(2.3.60) zusammengefaßt und lauten

$$\underline{r}^T = [q_0 \mid -l_4^1,\ -l_3^1,\ -l_2^1,\ -l_1^1,\ -l_0^1 \mid -l_1^2,\ -l_0^2].$$

In bekannter Weise wird somit Gl.(2.3.61) als

$$\underline{R}_n = [\underline{e} \mid \underline{c}_1 \mid \underline{b}^2]$$

festgelegt, wobei die $(n_r-q) \times (n+n_r) = (1x8)$-Untermatrix $\underline{a}$ die Koeffizienten des Polynoms

$$N_S(s)\ \det(s\underline{I}-\underline{S}) = 8s^2 - 12s^3 + 2s^4 + s^5 + s^7$$

in der Form von Gl.(2.3.16a) enthält und die Matrix γ^2 die Koeffizienten des Polynoms

$$Z_{S2}(s)\ \det(s\underline{I}-\underline{S}) = -16s^2 + s^6$$

in der Struktur von Gl.(2.3.16c) in $n_r-q+1 = 4-3+1 = 2$ Spalten enthält. Die Koeffizienten des Zählerpolynoms $Z_{S1}(s)$ tauchen in den $n_r+1 = 5$ Spalten der Matrix $\underline{c}^1$ auf. Mit diesen Ansätzen kann die rechte Seite von Gl.(2.3.59) unter Berücksichtigung der Reglerordnung und der Gln.(2.2.21) bis (2.2.23) berechnet werden als

$$\underline{B}_\varphi \cdot \hat{\underline{\varphi}} + \underline{\delta} - \underline{B}_\psi \cdot \underline{\psi} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 54 \\ 108 \\ 81 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 17 \\ 122 \\ 492 \\ 1219 \\ 1849 \\ 1809 \\ 1080 \\ 324 \end{bmatrix}.$$

Der Lösungsvektor $\hat{\underline{h}}^T$ liefert die Reglerübertragungsfunktion

$$G_{R1}(s) = \frac{l_o^1 + l_1^1 s + l_2^1 s^2 + l_3^1 s^3 + s^4}{\det(s\underline{I}-\underline{S})(q_o+s)} = \frac{324 + 594s + 234s^2 + 184s^3 + 87.5s^4}{s(s^2+4)(s+545)}$$

und

$$G_{R2}(s) = \frac{\det(s\underline{I}-\underline{S})(l_o^2 + l_1^2 s)}{\det(s\underline{I}-\underline{S})(q_o+s)} = \frac{-209.5 + 527.9s}{(s+545)}.$$

Wie im ersten Beispiel können für den Vorfilterentwurf bei Berücksichtigung von $n_r = 4$ und $k = 2$ zwei Nullstellen von $\hat{P}_B(s)$ durch die

entsprechenden von $Z_{RW}(s)$ gekürzt werden. Daraus folgt

$$\hat{P}_B(s) = P_{STM}(s)\ P_B(s) = (s+3)^4 = \Delta a(s)\ \Delta f(s)$$

mit

$$\Delta a(s) = \Delta f(s) = (s+3)^2 = 9 + 6s + s^2.$$

Die Lösung von Gl.(2.2.29a) ergibt die bereits ermittelten Koeffizienten für die Polynome $\tilde{Z}_{RW}(s)$ und RP(s), jedoch mit dem neuen Ansatz für $\Delta a(s)$ und $N_R'(s)$ erhält man das Vorfilter

$$G_{RW}(s) = \frac{Z_{RW}(s)}{N_R(s)} = \frac{Z_{RW}(s)\quad a(s)}{\det(s\underline{I}-\underline{S})N_R'(s)} = -\frac{(36 + 42s + 106s^2)(s+3)^2}{s(s^2+4)(s+545)}.$$

Die Verringerung der Ordnung des Zustandsreglers bedeutet zwar in diesem Beispiel keine wesentliche Minderung des Aufwandes, ist jedoch für "große" n und r durchaus von Interesse. Es stellt sich heraus, daß in dieser Form nur die Auswirkung der Störungen auf die Hauptregelgröße $y_1(t)$ asymptotisch kompensiert werden kann. Ein Vergleich der Einschwingvorgänge mit denen aus den Bildern 2.4.1 und 2.4.2 zeigt, daß, wie gefordert, das Führungsverhalten sowohl für sprungförmige als auch für rampenförmige Führungsgrößen übereinstimmt (Bild 2.4.3), während das Störverhalten des ordnungsreduzierten Entwurfs (Bild 2.4.4) nur geringe Abweichungen vom nichtreduzierten Entwurfsverfahren zeigt.

Dies zeigt deutlich die Vorteile des Verfahrens auf: Der Entwurf des Zustandsreglers kann vollständig im Frequenzbereich durchgeführt werden, wobei die Reglerparameter mit Hilfe linearer algebraischer Gleichungen gewonnen werden. Auf der Basis von [14] ist es möglich, einen weitergehenden Ansatz für die Störungsregelung und die Ordnungsreduzierung der Regler anzugeben. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt jedoch darin, daß eine Erweiterung auf Systeme mit mehreren Stellgrößen in dieser Form sehr aufwendig wird.

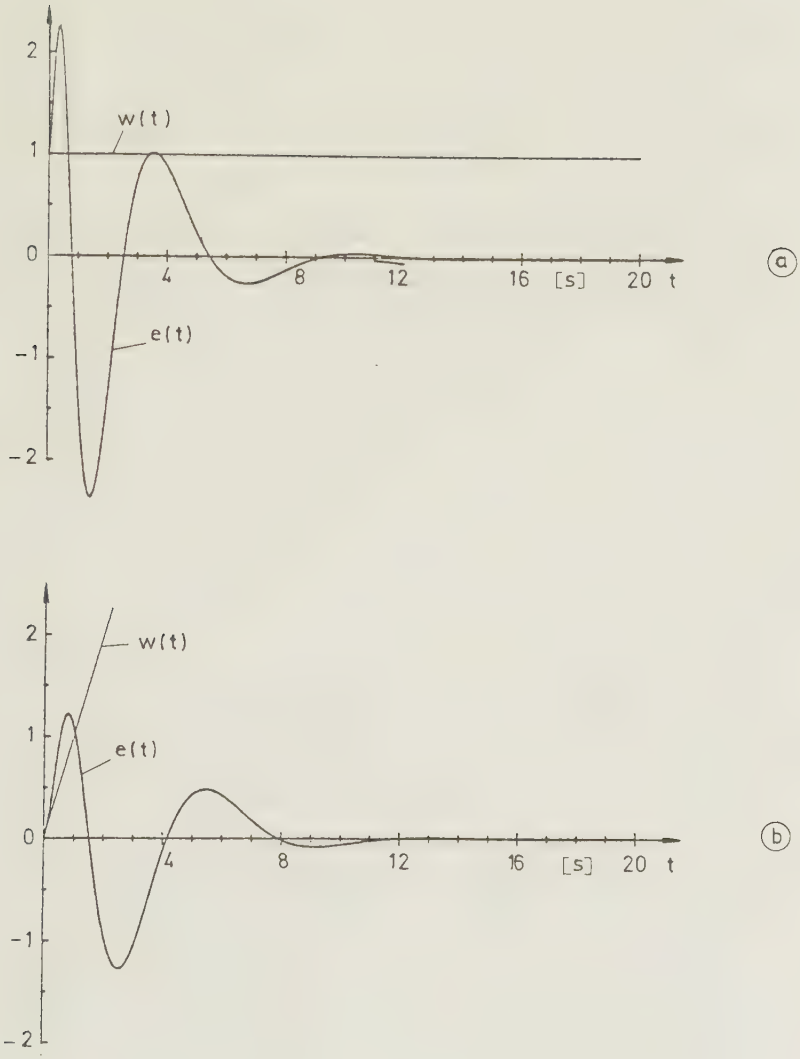


Bild 2.4.1. Regelabweichung $e(t) = w(t) - y_1(t)$ für
(a) sprungförmige
(b) rampenförmige Führungsgröße

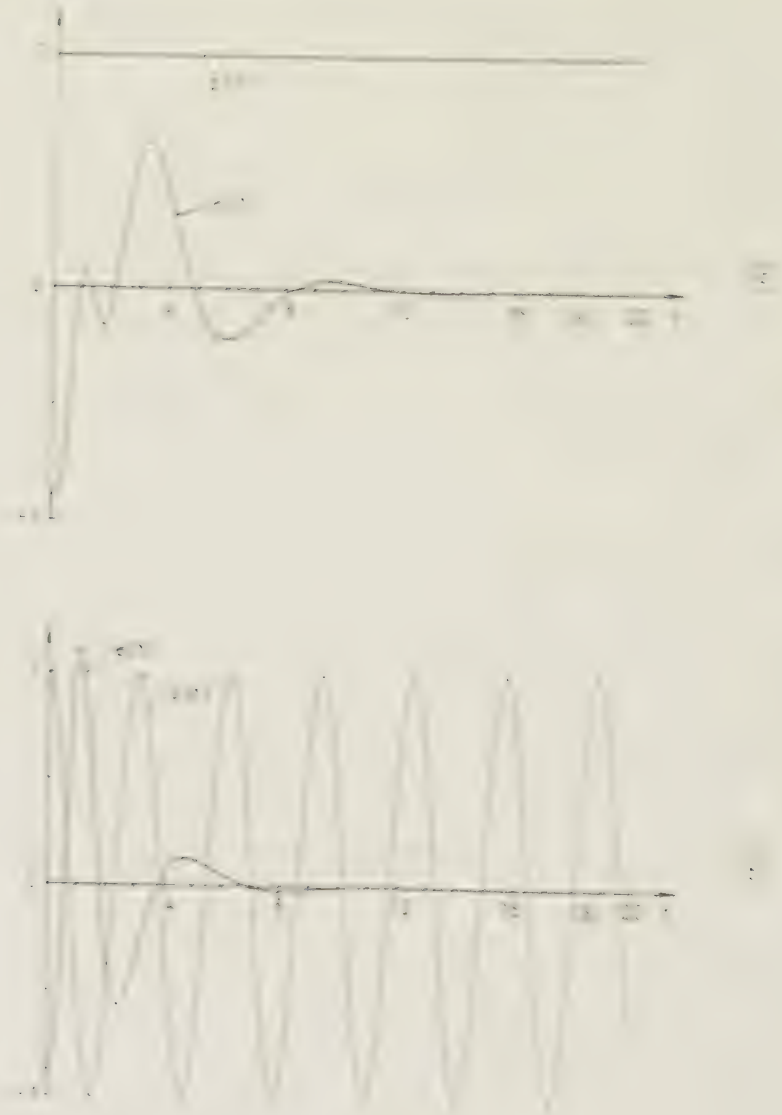


Bild 3.4.2. Regelabweichung e(t) = w-y, (a) sprungförmige (b) sinusförmige Störgröße

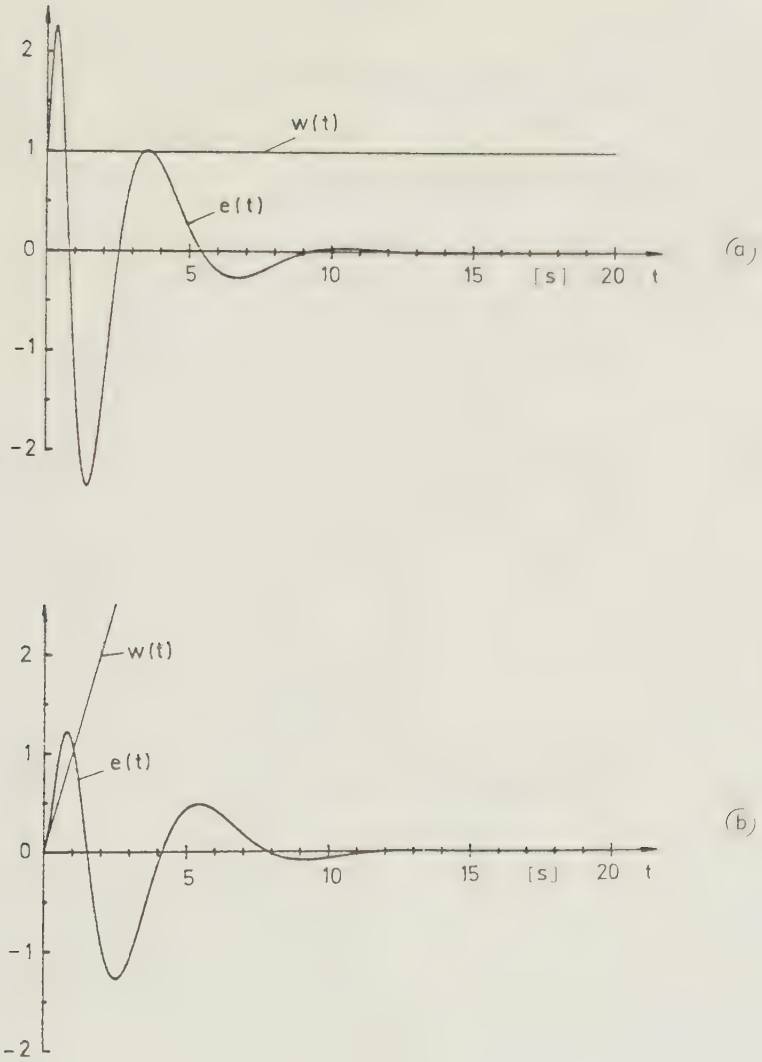
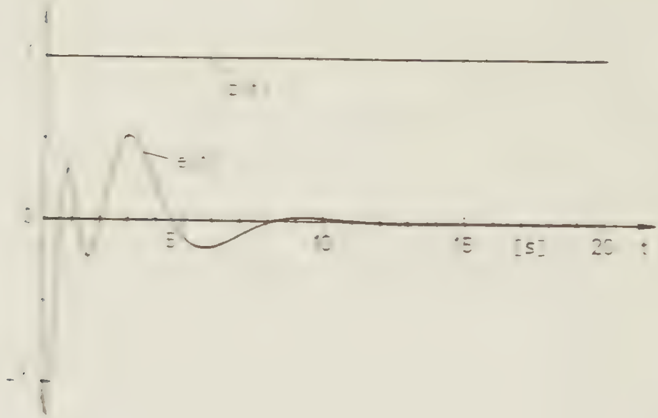
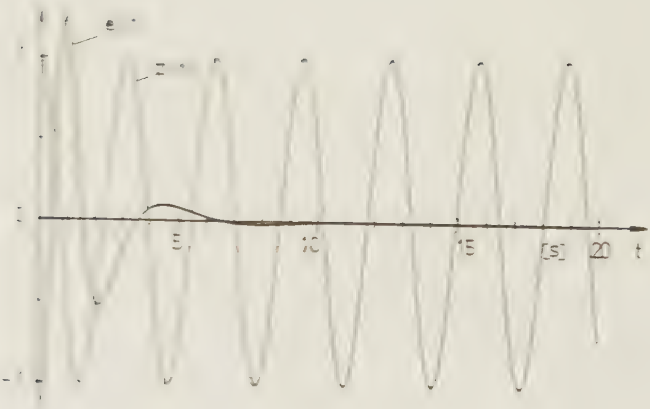


Bild 2.4.3. Regelabweichung $e(t) = w(t) - y_1(t)$ des ordnungsreduzierten Entwurfs für
(a) sprungförmige
(b) rampenförmige Führungsgröße



(a)



(b)

Bild [illegible]. Regelabweichung $e(t) = -y_1(t)$ des [illegible] Entwurfs für

(a) sprungförmige

(b) sinusförmige Störgröße

3. Die Synthese von Mehrgrössenregelungen

3.1 Bedingungen für die Synthese des Regelkreises

Ziele der Reglersynthese sind

- Entkopplung des Übertragungsverhaltens zwischen Führungsgröße und Regelgröße.
- Ausregelung von auftretenden Störungen unabhängig vom Eingriffsort der Störungen.
- Polvorgabe für die entkoppelten Einzelübertragungsfunktionen und
- Robustheit in Bezug auf Stabilität.

Zahlreiche Veröffentlichungen, die sowohl Lösungsansätze im Zeit- als auch im Frequenzbereich anbieten, sind für die unterschiedlichsten Anwendungen in den letzten Jahren erschienen. Ein historischer Überblick sowie eine kritische Wertung neuerer Verfahren mit zahlreichen Literaturhinweisen ist in [22] zu finden. Ein wesentlicher Zweig der Synthese von Mehrgrößenregelungen ist der, algebraische Methoden zu verwenden. Ausgangspunkte waren hier Zustandsraummethoden, z. B. Beobachterentwurf nach Luenberger und Polvorgabe, die nach Transformation in den Frequenzbereich, z. B. nach [40] erweiterte Regelungsstrukturen mit einfacheren Synthesegleichungen zur Folge hatten. Hierauf aufbauend sind zahlreiche weitere Ergänzungen veröffentlicht worden, die jedoch als Teilelemente von [42] betrachtet werden können. Für die unterschiedlichsten Synthesemethoden kann als Basis die in [42] angegebene und in Bild 3.1.1 dargestellte Struktur verwendet werden. Mit $\underline{G}_{RU}(s) = \underline{0}$ lassen sich mit Hilfe dieser Struktur Konzepte für eine Mehrgrößen-Kaskadenregelung ableiten, und für $\underline{G}_{RU}(s) = \underline{0}$ und $\underline{G}_1(s) = \underline{0}$ erhält man den bekannten Standardregelkreis. Die Einführung von sog. "Beobachterpolynomen" in Form der Diagonalpolynom matrix $\underline{\lambda}(s)$, wie sie in [40] ausführlich beschrieben ist, ermöglicht die Regleransätze

$$\underline{G}_{RU}(s) = \underline{\lambda}^{-1}(s)\ \underline{g}_U(s) \qquad (3.1.1)$$

und

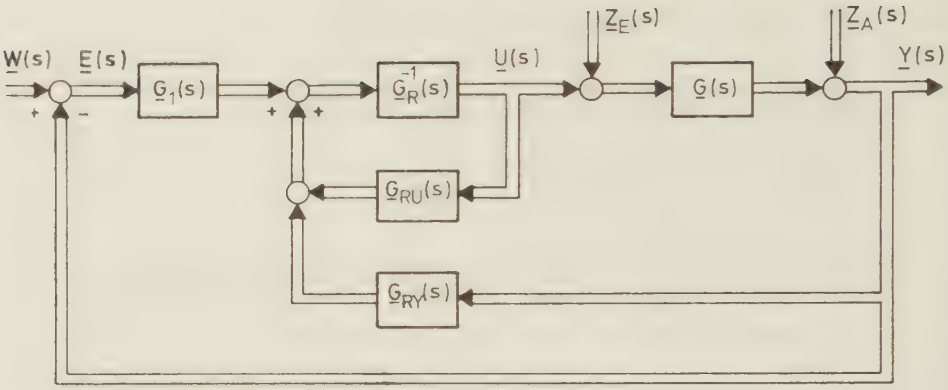


Bild 3.1.1. Struktur des Regelkreises

$$\underline{G}_{RY}(s) = \underline{\lambda}^{-1}(s)\ \underline{g}_Y(s). \tag{3.1.2}$$

Führt man zusätzlich Störvektoren $\underline{Z}_E(s)$ und $\underline{Z}_A(s)$ ein, die jeweils am Eingang und am Ausgang der Regelstrecke angreifen, so erhält man die Regelgröße

$$\underline{Y}(s) = \underline{G}_W(s)\ \underline{W}(s) + \underline{G}_{ZE}(s)\ \underline{Z}_E(s) + \underline{G}_{ZA}(s)\ \underline{Z}_A(s)\ , \tag{3.1.3}$$

wobei die Übertragungsmatrizen gegeben sind durch

$$\underline{G}_W(s) = \underline{G}_O(s)\underline{G}_1(s)\ , \tag{3.1.4}$$

$$\underline{G}_{ZE}(s) = \underline{G}_O(s)(\underline{G}_R(s)-\underline{G}_{RU}(s))\ , \tag{3.1.5}$$

$$\underline{G}_{ZA}(s) = \underline{G}_O(s)(\underline{G}_R(s)-\underline{G}_{RU}(s))\underline{G}^{-1}(s) \tag{3.1.6}$$

mit

$$\underline{G}_O(s) = [(\underline{G}_R(s)-\underline{G}_{RU}(s))\ \underline{G}^{-1}(s)-(\underline{G}_{RY}(s)-\underline{G}_1(s))]^{-1}\ . \tag{3.1.7}$$

Das Ziel der Reglersynthese ist es nun, für die nichtsinguläre, rationale (rxr) Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ die Regelkreiselemente so zu bestimmen, daß die rationale Übertragungsmatrix $\underline{G}_W(s)$ die Bedingung

$$\underline{G}_W(s) = \underline{G}_O(s)\underline{G}_1(s) = \underline{K}_{g\lambda}(s) = \begin{bmatrix} K_{g1}(s) & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & K_{gr}(s) \end{bmatrix} \tag{3.1.8}$$

erfüllt und diagonal, asymptotisch stabil und nichtsingulär ist. Voraussetzung hierfür ist, daß die Regelstrecke in ihrer Struktur und Parametrierung exakt bekannt ist und die Determinante der Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ nicht identisch in s verschwindet [5].

Ein weiteres Ziel ist, den Aufwand möglichst gering zu halten, d. h. Regler geringer Ordnung zu entwerfen.

Im Gegensatz zu [42] soll hier so vorgegangen werden, daß für die Synthese des Regelkreises auf eine rechtsprime Zerlegung der Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ verzichtet wird. Hierfür werden Bedingungen formuliert. Weiterhin wird versucht, die Synthesegleichungen in geschlossener Form zu formulieren und für die Anwendung zu erschließen.

Ausgangspunkt der Reglersynthese ist Gl.(3.1.7). Mit Gl.(3.1.8) ist

$$\underline{G}_1^{-1}(s)\ \underline{G}_o^{-1}(s) = \underline{K}_{g\lambda}^{-1}(s) \quad . \tag{3.1.9}$$

Schreibt man $\underline{G}_o$ als

$$\underline{G}_o(s) = [\underline{G}_R(s)\underline{G}^{-1}(s) + \underline{G}_1(s) - (\underline{G}_{RU}(s)\ \underline{G}^{-1}(s) + \underline{G}_{RY}(s))]^{-1} \ , \tag{3.1.10}$$

so wird substituiert

$$\underline{\gamma}(s) = \underline{G}_{RU}(s)\ \underline{G}^{-1}(s) + \underline{G}_{RY}(s) \tag{3.1.11}$$

und

$$\underline{\delta}(s) = \underline{G}_R(s)\ \underline{G}^{-1}(s) - \underline{\gamma}(s) \quad . \tag{3.1.12}$$

Damit folgt für Gl.(3.1.10)

$$\underline{G}_o^{-1}(s) = \underline{\delta}(s) + \underline{G}_1(s) \tag{3.1.13}$$

und für Gl.(3.1.9)

$$\underline{\delta}(s)\ \underline{K}_{g\lambda}(s) = \underline{G}_1(s)(\underline{I} - \underline{K}_{g\lambda}(s)) \quad . \tag{3.1.14}$$

Zur Ableitung der Realisierbarkeitsbedingungen für die Regelkreiskomponenten, wird für die nichtsinguläre, rationale und diagonale (rxr)-Matrix $\underline{K}_{g\lambda}(s)$ gesetzt:

$$\underline{K}_{g\lambda}(s) = \begin{bmatrix} K_{g1}(s) & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & K_{gr}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{g1}(s)}{N_{g1}(s)} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \frac{Z_{gr}(s)}{N_{gr}(s)} \end{bmatrix} . \qquad (3.1.15)$$

Die Übertragungsfunktionen $F_{gi}(s)$ [illegible]

$$F_{gi}(s) = \frac{Z_{gi}(s)}{N_{gi}(s)} = \frac{c_{oi} + d_{1i}s + \ldots + d_{mi}s^{mi}}{c_{oi} + c_{1i}s + \ldots + s^{ni}} \quad , \; ni > mi \; . \qquad (3.1.16)$$

wobei für die Wurzeln s_ν von Zähler- und Nennerpolynom gilt

$$Re(s_\nu) < 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, ni+mi \text{ und } i = 1, \ldots, r \; .$$

Spaltet man $\underline{K}_{g\lambda}(s)$ auf in $\underline{E}_{g\lambda}(s) = \underline{L}_{g\lambda}^{-1}(s)\,\underline{P}_{g\lambda}(s)$, die Zählerpolynome und $\underline{N}_{g\lambda}(s)$ die Nennerpolynome, so folgt aus Gl.(3.1.14)

$$\underline{\delta}(s)\,\underline{Z}_{g\lambda}(s) = \underline{G}_1(s)\; s\; \underline{E}_{g\lambda}(s) = \underline{G}_1(s)\; s \begin{bmatrix} F_{g1}(s) & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & E_{gr}(s) \end{bmatrix} \qquad (3.1.17)$$

mit

$$N_{gi}(s) - Z_{gi}(s) =$$

$$= s[(c_{1i}-d_{1i}) + (c_{2i}-d_{2i})s + \ldots + (c_{mi}-d_{mi})s^{mi-1} + \ldots + s^{ni-1}] \qquad (3.1.18)$$

$$= s\, E_{gi}(s) \text{ für } i = 1, \ldots r$$

Zur Ableitung der Realisierungsbedingungen [illegible] elemente $\underline{G}_{RY}(s)$, $\underline{G}_R(s)$ und $\underline{G}_{RU}(s)$ [illegible] (3.1.12) betrachtet. Demnach ist

$$\underline{G}_{RY}(s) = \underline{G}_R(s)\,\underline{G}^{-1}(s) - \underline{G}_{RU}(s)\,\underline{G}^{-1}(s) - \underline{\delta}(s) \; . \qquad (3.1.19)$$

Mit den Ansätzen aus den Gln.(3.1.1) und (3.1.2) liefert Gl. (3.1.19) die Beziehung

$$\underline{\lambda}^{-1}(s)\,\underline{g}_Y(s) = (\underline{G}_R(s) - \underline{\lambda})^{-1}(s)\,\underline{g}_U(s)\,\underline{G}^{-1}(s) - \underline{\delta}(s) \; . \qquad (3.1.20)$$

Die steuerbare und beobachtbare Regelstrecke $\underline{G}(s)$ mit der $\underline{G}(s)| \neq 0$ wird analog zu [2] dargestellt als

$$\underline{G}^{-1}(s) = \frac{1}{HN(s)} \underline{G}^{*}(s) \quad , \qquad (3.1.21)$$

wobei HN(s) ein Polynom in s ist und als "Hauptnenner" interpretiert werden kann. $\underline{G}^{*}(s)$ ist eine quadratische Polynommatrix, deren Elemente teilerfremd mit HN(s) sind und somit eindeutig dargestellt werden können. Beim inneren Regelkreis, der aus den Elementen $G_{pr}(s)$ und $G_{p}^{-1}(s)$ besteht, ist zu berücksichtigen, daß er keine sprungfähigen Elemente enthält und somit auch mit Hilfe von digitalen Reglern realisierbar bleibt. Diese Einschränkung gilt für $G_{pY}(s)$ und $G_{1}(s)$ nicht, wenn man $\underline{G}(s)$ als nicht sprungfähig voraussetzt.

Mit Gl.(3.1.21) folgt für Gl.(3.1.20)

$$g_{Y}(s) = (\underline{\lambda}(s) \underline{G}_{p}(s) \underline{g}_{U}(s)) \frac{1}{HN(s)} \underline{G}^{*}(s) \underline{\delta}(s) \quad . \qquad (3.1.22)$$

Da $\underline{G}_{p}(s)$ voraussetzungsgemäß als Polynommatrix definiert ist, entstehen aus Gl.(3.1.22) folgende Bedingungen:

$$\underline{\lambda}(s) = HN(s) \underline{\lambda}'(s) \qquad (3.1.23)$$

und

$$\underline{g}_{U}(s) = HN(s) \underline{g}'_{U}(s) \quad , \qquad (3.1.24)$$

wobei $\underline{\lambda}'(s)$ und $\underline{g}'_{U}(s)$ ebenfalls Polynommatrizen sind und HN(s) und $\underline{\lambda}'(s)$ nur Wurzeln in der linken s-Halbebene enthalten. Damit nimmt Gl.(3.1.22) die Form

$$\underline{g}_{Y}(s) = (\underline{\lambda}'(s) \underline{G}_{R}(s) \underline{g}'_{U}(s)) \underline{G}^{*}(s) HN(s) \underline{\lambda}'(s) \underline{\delta}(s) \qquad (3.1.25)$$

an. Somit ist

$$\underline{G}_{RU}(s) = \underline{\lambda}^{-1}(s) \underline{g}_{U}(s) = \underline{\lambda}'^{-1}(s) \underline{g}'_{U}(s) \quad . \qquad (3.1.26)$$

Da $\underline{G}_{pY}(s)$ Übertragungsfunktionen mit Zählergrad = Nennergrad enthalten darf, entsteht aus Gl.(3.1.25) die Bedingung, daß der maximale Spaltengrad der beiden Matrizen $(\underline{\lambda}'(s) \underline{G}_{R}(s) \underline{g}'_{U}(s)) \underline{G}^{*}(s)$ und $HN(s) \underline{\lambda}'(s) \underline{\delta}(s)$ identisch sein muß.

Bezeichnet man den maximalen Grad der Spalte i einer Polynommatrix mit $\partial_i [\ ]$, so läßt sich für Gl.(3.1.25) folgender Zusammenhang formulieren:

$$\partial_i [\underline{\lambda}'(s) \underline{G}_{R}(s) \underline{G}^{*}(s)] = \partial [HN(s)] + \partial_i [\underline{\lambda}'(s) \underline{\delta}(s)] \quad . \qquad (3.1.27)$$

Im nächsten Schritt wird [illegible] gung von Gl. (3.1.18) betrachtet. [illegible] lassen sich Bedingungen für die Matrix $\underline{\delta}(s)$ formulieren.

Diese ist gegeben durch

$$\underline{\delta}(s) = \underline{G}_1(s)\; s\; \underline{E}_{g\lambda}(s)\; \underline{Z}^{-1}_{g\lambda}(s) = \text{[illegible]}$$

Bei vorgegebenen Null- [illegible] verhaltens liegen die Matrizen [illegible] Bestimmung von $\underline{G}_1(s)$ [illegible] lerpolynome der Spalte i von [illegible] kativ enthalten. Dies gelingt mit dem Ansatz

$$\underline{G}_1(s) = \frac{1}{s}\,\underline{K}(s)\;\underline{Z}_{g\lambda}(s) \quad . \tag{3.1.29}$$

Somit ist

$$\underline{\delta}(s) = \underline{K}(s)\;\underline{E}_{g\lambda}(s) \tag{3.1.30}$$

und es gilt

$$\partial_i[\underline{\delta}(s)] = \partial_i[\underline{K}(s)] + \partial_i[\underline{E}_{g\lambda}(s)] \quad . \tag{3.1.31}$$

Ausgangspunkt für die [illegible]
Hierzu wird das Störverhalten [illegible] $\underline{Z}_E(s) \neq \underline{0}$ ist die [illegible] (3.1.5) und Gl. (3.1.4) gegeben durch

$$\underline{G}_{ZE}(s) = \underline{G}_W(s)\;\underline{G}_1^{-1}(s)\,[\underline{G}_R(s) - \underline{G}_{RU}(s)] \quad . \tag{3.1.32}$$

Unter Berücksichtigung der Gln. (3.1.8), (3.1.23), (3.1.24), (3.1.26) und (3.1.29) läßt sich Gl. (3.1.32) als

$$\underline{G}_{ZE}(s) = \text{[illegible]} \tag{3.1.33}$$

formulieren.

Wird z. B. [illegible] als [illegible] multiplikativ in den [illegible] Hilfe des Terms [illegible] durch Wahl von $\underline{G}_R(s)$ ebenfalls [illegible] tigt, daß sowohl [illegible] als auch [illegible]

Anteile besitzen dürfen.

Im einfachsten Fall wird sowohl $\underline{\lambda}'(s)$ als auch $\underline{G}_R(s)$ als Diagonalmatrix angesetzt. Für die Matrix $\underline{\lambda}^{-1}(s)(\underline{\lambda}'(s)\underline{G}_R(s)-\underline{g}'_U(s))$ gilt dann, daß sie in den Hauptdiagonalen rationale Übertragungsfunktionen enthält, deren Zählergrad gleich ihrem Nennergrad sein muß. Die Nebendiagonalelemente sind rationale Übertragungsfunktionen mit Zählergrad kleiner als Nennergrad.

Die Vorgehensweise bei der Auslegung des Regelkreises soll an dieser Stelle noch einmal ausführlich an dem aus [42] bekannten Mehrgrößensystem gezeigt werden. Gegeben sei das Mehrgrößensystem

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{1}{s-2} \\ \frac{1}{(s-2)(s+4)} & \frac{s-1}{(s-2)(s+4)} \end{bmatrix},$$

das nach Gl.(3.1.21) dargestellt werden kann als

$$\underline{G}^{-1}(s) = \frac{1}{HN(s)}\,\underline{G}^{*}(s) = \begin{bmatrix} (s-1) & -(s+4) \\ -1 & (s+4) \end{bmatrix},$$

also HN(s) = 1. Für den Regelkreis wird das folgende entkoppelte Regelverhalten vorgegeben:

$$\underline{K}_{g\lambda}(s) = \begin{bmatrix} \frac{c_{o1}}{c_{o1}+c_{11}s+s^2} & 0 \\ 0 & \frac{c_{o2}}{c_{o2}+c_{12}s+s^2} \end{bmatrix}.$$

Somit gilt für Gl.(3.1.16)

$$m_1 = m_2 = 0$$

und $n_1 = n_2 = 2$.

Die Auswertung von Gl.(3.1.27) ergibt für die maximalen Spaltengrade unter Berücksichtigung von $\partial[\lambda_1(s)] = \partial[\lambda_2(s)]$

$$\partial_i[\underline{G}_p(s)\,\underline{G}^*(s)] = \partial[HN(s)] - \partial_i[\underline{d}] \quad , \qquad i = 1,2 \quad .$$

Mit $\partial[HN(s)] = 0$ und dem Ansatz $\underline{G}_p(s) = \underline{I}$ folgt

$$\partial_i[\underline{G}^*(s)] = \partial_i[\underline{d}(s)] = 1 \quad , \qquad i = 1,2 \quad .$$

Da

$$\underline{E}_{g\lambda}(s) = \begin{bmatrix} (c_{11}+s) & 0 \\ 0 & (c_{12}+s) \end{bmatrix}$$

durch $\underline{K}_{g\lambda}(s)$ vorgegeben ist, folgt für Gl.(3.1.31)

$$\partial_i[\underline{F}(s)] = \partial_i[\underline{d}(s)] - \partial_i[\underline{E}_{g\lambda}(s)] = 0 \quad , \qquad i = 1,2 \quad .$$

Für Gleichung (3.1.26) wird angesetzt

$$\underline{\Lambda}(s) = \underline{\Lambda}'(s) = \begin{bmatrix} s+a & 0 \\ 0 & s+b \end{bmatrix} \qquad a,b > 0$$

und

$$\underline{g}_\lambda'(s) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} .$$

Damit ist

$$\underline{\Lambda}'(s) - \underline{g}_\lambda'(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

und

$$\underline{g}_{p\lambda}(s) = \underline{\Lambda}^{-1}(s)\,\underline{g}_\lambda(s) = \begin{bmatrix} \frac{a}{s+a} & 0 \\ 0 & \frac{b}{s+b} \end{bmatrix} .$$

Mit Gl.(3.1.30) wird

$$\underline{L}(s) = \underline{K}\,\underline{E}_{g\lambda}(s) \quad .$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gl.(3.1.25) ein, so folgt daraus

$$\underline{g}_Y(s) = (\underline{\lambda}'(s)-\underline{g}_U'(s))\underline{G}^*(s)-\underline{\lambda}'(s)\ \underline{K}\ \underline{E}_{g\lambda}(s)$$

$$= \begin{bmatrix} s(s-1) & -s(s+4) \\ -s & s(s+4) \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} k_{11}(s^2+s(a+c_{11})+a\ c_{11}) & k_{12}(s^2+s(a+c_{12})+a\ c_{12}) \\ k_{21}(s^2+s(b+c_{11})+b\ c_{11}) & k_{22}(s^2+s(b+c_{12})+b\ c_{12}) \end{bmatrix} .$$

Da $\underline{g}_Y(s)$ nur Polynome mit dem Grad = 1 enthalten darf, folgt daraus

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Somit gilt

$$\underline{G}_{RY}(s) = \underline{\lambda}^{-1}(s)\cdot\underline{g}_Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{-(a\ c_{11}+s(a+1+c_{11}))}{s+a} & \frac{a\ c_{12}+s(a+c_{12}-4)}{s+a} \\ \frac{s}{s+b} & \frac{-(b\ c_{12}+s(b+c_{12}-4)}{s+b} \end{bmatrix} .$$

Gl. 3.1.29) liefert

$$G_1(s) = \frac{1}{s}\ \underline{K}\ \underline{Z}_{g\lambda}(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{o1} & 0 \\ 0 & c_{o2} \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} c_{o1} & -c_{o2} \\ 0 & c_{o2} \end{bmatrix} .$$

Das Störverhalten für Störungen am Eingang der Regelstrecke läßt sich aus Gl.(3.1.33) zu

$$\underline{G}_{ZE}(s) = \underline{K}_{g\lambda}(s)\; s\; \underline{Z}_{g\lambda}^{-1}(s)\; \underline{K}^{-1}\; \underline{\lambda}'^{-1}(s)(\underline{\lambda}'(s)-\underline{g}'_U(s))$$

$$= s^2 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(c_{o1}+c_{11}s+s^2)(s+a)} & \dfrac{1}{(c_{o1}+c_{11}s+s^2)(s+b)} \\ 0 & \dfrac{1}{(c_{o2}+c_{12}s+s^2)(s+b)} \end{bmatrix}$$

berechnen.

Durch Anwendung des vorgestellten Verfahrens ist es unter Verzicht auf eine eindeutige relative rechtsprime Zerlegung der Regelstrecke möglich, eine dynamische Entkopplung der Regelgrößen und eine Polvorgabe unter Berücksichtigung des Störverhaltens, z. B. mit der Polynommatrix $\underline{\lambda}(s)$, vorzunehmen.

Für zahlreiche Anwendungsfälle bietet sich an, die Struktur nach Bild 3.1.1 und damit auch die Synthese des Regelkreises zu vereinfachen. Als Ergebnis der Synthese aus [42] wurde eine Struktur mit "einfacher" Ausgangsrückkopplung, unter Verzicht auf die Zustandsregelung, verwendet. Hier soll jedoch so vorgegangen werden, daß, wie in [2] bereits diskutiert, $\underline{G}_1(s) = \underline{O}$ gesetzt und zusätzlich eine Vorfiltermatrix eingeführt wird. Dies hat Einschränkungen für die Vorgabe von Führungs- und Störverhalten zur Folge.

3.2 Der Reglerentwurf für die reduzierte Struktur des Regelkreises

Analog zu Gl.(3.1.3) und Bild 3.2.1 wird das Führungs- und Störverhalten bestimmt. In diesem Fall sind die Übertragungsmatrizen gegeben durch

$$\underline{G}_W(s) = \underline{G}_o(s)\; \underline{G}_V(s) \quad , \tag{3.2.1}$$

$$\underline{G}_{ZE}(s) = \underline{G}_o(s)\; (\underline{I}+\underline{G}_{RU}(s)) \quad , \tag{3.2.2}$$

$$\underline{G}_{ZA}(s) = \underline{G}_o(s)\; (\underline{I}+\underline{G}_{RU}(s))\; \underline{G}^{-1}(s) \quad , \tag{3.2.3}$$

und

$$\underline{G}_o(s) = [(\underline{I}+\underline{G}_{RU}(s))\underline{G}^{-1}(s)+\underline{G}_{RY}(s)]^{-1} \quad . \tag{3.2.4}$$

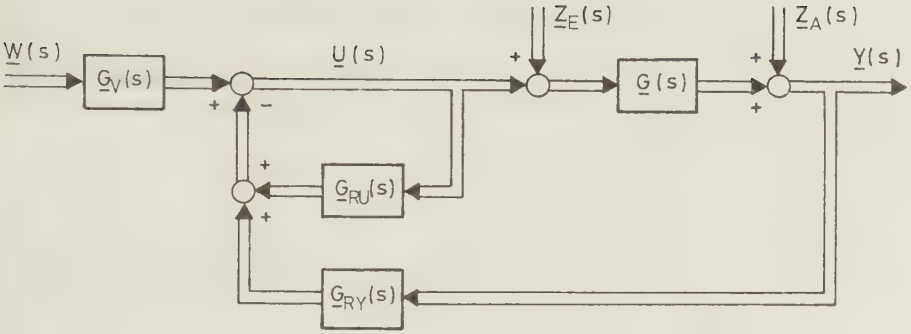


Bild 3.2.1. Reduzierte Struktur des Regelkreises

Eine einfache Anwendung von Gl.(3.2.1) unter Berücksichtigung von Gl.(3.1.8), also

$$\underline{G}_W(s) = \underline{G}_o(s)\ \underline{G}_V(s) = \underline{K}_{g\lambda}(s) \tag{3.2.5}$$

zeigt, daß

$$\underline{G}_o(s) = \underline{K}_{g\lambda}(s)\ \underline{G}_V^{-1}(s) \tag{3.2.6}$$

unabhängig davon, ob $\underline{G}_V(s)$ als reellwertige oder rationale Übertragungsmatrix definiert wird, in den Zeilen jeweils multiplikativ identische Teilübertragungsfunktionen enthalten muß. Deshalb kann definiert werden

$$\underline{G}_o(s) = \underline{K}_{g\lambda}(s)\ \underline{K}(s) \tag{3.2.7}$$

mit

$$\underline{G}_V(s) = \underline{K}^{-1}(s) \quad . \tag{3.2.8}$$

Weiterhin wird definiert

$$\underline{F}(s) = \underline{I} + \underline{G}_{RU}(s) \quad . \tag{3.2.9}$$

Mit dieser Matrix ist es möglich, den Einfluß der Nullstellen von $\underline{\lambda}(s)$ auf das Störverhalten des Regelkreises zu beschreiben. Mit den bereits bekannten Ansätzen $\underline{G}_{RU}(s) = \underline{\lambda}^{-1}(s)\ \underline{g}_U(s)$, $\underline{G}_{RY}(s) = \underline{\lambda}^{-1}(s)\ \underline{g}_Y(s)$ und $\underline{G}^{-1}(s) = \frac{1}{HN(s)}\ \underline{G}^*(s)$ folgt mit den Gln.(3.2.4) und (3.2.7)

$$(\underline{\lambda}(s) + \underline{g}_U(s)) \frac{\underline{G}^*(s)}{HN(s)} + \underline{g}_Y(s) = \underline{\lambda}(s) \frac{\underline{G}_o^*(s)}{HN_o(s)} \quad . \tag{3.2.10}$$

Hierbei ist in $\underline{G}_o^{-1}(s) = \frac{1}{HN_o(s)} \underline{G}_o^*(s)$, $\underline{G}_o^*(s)$ als Polynommatrix und $HN_o(s)$ als Hauptnenner definiert. Damit läßt sich Gl. (3.2.10) in folgende Form bringen:

$$\underline{\lambda}^{-1}(s)\ \underline{g}_Y(s) = \frac{1}{HN(s)HN_o(s)}$$

$$[(HN(s)\underline{G}_o^*(s) - \underline{G}^*(s)HN_o(s)) - \underline{\lambda}^{-1}(s)\underline{g}_U(s)\ \underline{G}^*(s)HN_o(s)]. \tag{3.2.11}$$

Hier gilt wiederum, daß $\underline{\lambda}^{-1}(s)\underline{g}_Y(s)$ Matrixelemente mit Zählergrad = Nennergrad enthalten darf, wenn $\underline{G}(s)$ als nicht sprungfähig vorausgesetzt wird. Dies gilt für $\underline{\lambda}^{-1}(s)\underline{g}_U(s)$ nicht. Für alle Elemente dieser Matrix muß die Bedingung Zählergrad < Nennergrad erfüllt sein. Damit $\underline{\lambda}^{-1}(s)\ \underline{g}_Y(s)$ realisierbar ist, muß gelten [2]

$$\partial_i[HN(s)\underline{G}_o^*(s) - HN_o(s)\underline{G}^*(s)] < \partial[HN_o(s)] + \partial_i[\underline{G}^*(s)] \quad . \tag{3.2.12}$$

Das heißt unter Berücksichtigung von Gl.(3.2.6), daß das Führungsverhalten nicht beliebig vorgegeben werden kann, sondern von der Ordnung und der Struktur der Mehrgrößen-Regelstrecke abhängt. Dies wird umso deutlicher, wenn die Vorfiltermatrix $\underline{G}_V(s)$ als konstante Koeffizientenmatrix, also unabhängig von s, vorgegeben wird. Setzt man $K_{gi}(s)$, wie in Gl.(3.1.16) beschrieben, mit mi = 0 an, so ist $HN_o(s) = 1$ und

$$\underline{G}_o^{-1}(s) = \underline{K}^{-1}\ \underline{K}_{g\lambda}^{-1}(s) = \underline{K}^{-1}\ \underline{N}_{g\lambda}(s) = \underline{G}_o^*(s) \quad . \tag{3.2.13}$$

$\underline{G}_o^*(s)$ enthält in jeder Spalte die entsprechenden Nennerpolynome, die sich nur durch unterschiedliche Faktoren unterscheiden. Gl. (3.2.12) kann somit umformuliert werden in

$$\partial_i[HN(s)\underline{K}^{-1}\underline{N}_{g\lambda}(s) - \underline{G}^*(s)] < \partial_i[\underline{G}^*] \quad . \tag{3.2.14}$$

Hieraus wird deutlich, daß $N_{gi}(s)$ nur entsprechend der Differenz zwischen $\partial_i[\underline{G}^*(s)]$ und $\partial[HN(s)]$ gewählt werden kann.

3.2.1 Berücksichtigung des Störverhaltens

Die Auswirkungen von Störungen auf den Regelkreis sind durch Gl. (3.2.2) beschrieben. Mit den Gln.(3.2.7) und (3.2.9) folgt daraus

$$\underline{G}_{ZE}(s) = \underline{G}_o(s)\ \underline{F}(s) = \underline{K}_{g\lambda}(s)\ \underline{K}(s)\ [\underline{I}+\underline{\lambda}^{-1}(s)\ \underline{g}_U(s)] \ . \quad (3.2.15)$$

Zur Festlegung der Realisierbarkeitsbedingungen für die Matrix $\underline{F}(s)$ wird beispielhaft ein System mit zwei Ein- und Ausgängen betrachtet. Das bedeutet insofern keine Einschränkung, als $\underline{\lambda}(s)$ und $\underline{K}_{g\lambda}(s)$ Diagonalmatrizen sind und sich somit leicht invertieren lassen. Für $\underline{\lambda}(s)$ und $\underline{g}_U(s)$ werden folgende Matrizen angesetzt:

$$\underline{\lambda}(s) = \begin{bmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{bmatrix}, \quad \underline{g}_U(s) = \begin{bmatrix} g_{U11}(s) & g_{U12}(s) \\ g_{U21}(s) & g_{U22}(s) \end{bmatrix}. \quad (3.2.16)$$

Die Struktur von $\underline{F}(s)$ wird deutlich, wenn die gemachten Ansätze in Gl.(3.2.9) eingeführt werden. Damit ist

$$\underline{F}(s) = \underline{I}+\underline{\lambda}^{-1}\underline{g}_U(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1(s)+g_{U11}(s)}{\lambda_1(s)} & \dfrac{g_{U12}(s)}{\lambda_1(s)} \\ \dfrac{g_{U21}(s)}{\lambda_2(s)} & \dfrac{\lambda_2(s)+g_{U22}(s)}{\lambda_2(s)} \end{bmatrix} . \quad (3.2.17)$$

Mit $\partial[\lambda_i(s)] > \partial[g_{Uij}(s)]$ für alle i,j sind alle Hauptdiagonalelemente rationale Übertragungsfunktionen, deren Zählergrad gleich ihrem Nennergrad ist. Diese Übertragungsfunktionen können so normiert werden, daß der Koeffizient der höchsten Potenz dieser Übertragungsfunktion im Zähler und im Nenner gleich Eins ist. Die restlichen Elemente von $\underline{F}(s)$ sind rationale Übertragungsfunktionen mit Zählergrad kleiner als Nennergrad.

Will man das Störverhalten im Sinne einer Vorgabe von $\underline{F}(s)$ beeinflussen, so ergeben sich hieraus Bedingungen für die Polynome $\lambda_i(s)$. Unter Berücksichtigung der Realisierbarkeitsbedingungen für $\underline{F}(s)$ und dem Ansatz

$$\underline{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{Z_{F11}(s)}{N_{F11}(s)} & \frac{Z_{F12}(s)}{N_{F12}(s)} \\ \frac{Z_{F21}(s)}{N_{F21}(s)} & \frac{Z_{F22}(s)}{N_{F22}(s)} \end{bmatrix} \qquad (3.2.18)$$

mit:

$$\underline{g}_U(s) = \underline{\lambda}(s)[\underline{F}(s)-\underline{I}] = \begin{bmatrix} \lambda_1(s)\frac{Z_{F11}(s)-N_{F11}(s)}{N_{F11}(s)} & \lambda_1(s)\frac{Z_{F12}(s)}{N_{F12}(s)} \\ \lambda_2(s)\frac{Z_{F21}(s)}{N_{F21}(s)} & \lambda_2(s)\frac{Z_{F22}(s)-N_{F22}(s)}{N_{F22}(s)} \end{bmatrix} . \qquad (3.2.19)$$

Für die Polynome $\lambda_i(s)$ läßt sich daraus schließen, daß die Nennerpolynome der i-ten Zeile von $\underline{F}(s)$ multiplikativ in $\lambda_i(s)$ enthalten sein müssen. Voraussetzung ist hierfür, daß alle Nullstellen von $\lambda_i(s)$ in der linken s-Halbebene liegen.

Mit den Ansätzen aus den Gleichungen (3.1.23) und (3.1.24) folgt aus Gl.(3.2.10)

$$[\underline{\lambda}'(s)+\underline{g}'_U(s)]\ \underline{G}^*(s)+\underline{g}_Y(s) = \frac{HN(s)}{HN_O(s)}\ \underline{\lambda}'(s)\underline{G}^*_O(s) \quad . \qquad (3.2.20)$$

Zusätzlich zu den Nennerpolynomen der i-ten Zeile von $\underline{F}(s)$ muß auch $HN(s)$ multiplikativ in $\underline{\lambda}'(s)$ enthalten sein [2]. Alle Nullstellen von $HN(s)$ und $HN_O(s)$ müssen dann in der linken s-Halbebene liegen.

Zur Ausregelung sprungförmiger Störungen am Eingang der Regelstrecke kann

$$\underline{F}(s) = \mathrm{diag}\left[s\,\frac{Z'_{Fi}(s)}{N'_{Fi}(s)}\right] \quad \text{für } i = 1, \ldots, r \qquad (3.2.21)$$

vorgegeben werden. Aus den Bedingungen für $\underline{F}(s)$ ergibt sich dann

$$\partial[Z'_{Fi}(s)] = \partial[N_{Fi}(s)] - 1 \quad . \qquad (3.2.22)$$

Mit Hilfe dieses Verfahrens ist es möglich, das Störungs- und Führungsverhalten des Regelkreises, in den angegebenen Grenzen, vor-

zugeben. Verschiedenartige Stör- und Führungssignale können durch die Wahl von $\underline{\lambda}(s)$, $\underline{F}(s)$ und $\underline{G}_V(s)$ beim Entwurf berücksichtigt werden. Die Synthese erfolgt durch die Lösung algebraischer Gleichungen.

Die Anwendung der angegebenen Verfahren auf verschiedene Mehrgrößensysteme wird in einem der folgenden Abschnitte durchgeführt. Hier wird auch ein Vergleich der Regelergebnisse mit anderen Synthesemethoden vorgenommen.

3.3 Entwurf von Mehrgrößenregelungen für endliche Einstellzeit

Grundlage dieser Entwurfsmethode [6] ist wiederum die in Bild 3.2.1 angegebene Struktur. Am Beispiel einer Mehrgrößen-Deadbeat-Regelung soll prinzipiell eine Entwurfsmethode für diskrete Systeme vorgestellt werden. Der Regelkreisentwurf selbst wird mit Hilfe der Inversen der Streckenübertragungsmatrix vorgenommen.

An die Regelung werden folgende Bedingungen gestellt:

- Bei sprungförmigen Sollwertänderungen $\underline{W}(z)$ sollen sowohl die Regelgröße $\underline{Y}(z)$ als auch die Stellgröße $\underline{U}(z)$ in endlicher Zeit ihre stationären Endwerte erreichen.
- Sprungförmige Störungen am Eingang und am Ausgang der Regelstrecke sollen in endlicher Zeit auf Null ausgeregelt werden.
- Für die einzelnen Führungs- und Regelgrößen wird vollständige Entkopplung verlangt.
- Stellgrößenbeschränkung muß möglich sein.

3.3.1 Herleitung der Entwurfsbedingungen

Die Regelgrößen lassen sich, in Abhängigkeit der verschiedenen Eingangsgrößen, nach Bild 3.2.1 wie folgt darstellen:

$$\underline{Y}(z) = \underline{G}_{ZA}(z)\ \underline{Z}_A(z) + \underline{G}_{ZE}(z)\underline{Z}_E(z) + \underline{G}_W(z)\ \underline{W}(z) \quad . \qquad (3.3.1)$$

Hierbei sind die einzelnen Übertragungsmatrizen gegeben durch:

$$\underline{G}_W(z) = \underline{G}_O(z)\,\underline{G}_V(z) \quad , \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned}\underline{G}_O(z) &= [\underline{I}+\underline{G}(z)\underline{F}^{-1}(z)\underline{G}_{RY}(z)]^{-1}\underline{G}(z)\underline{F}^{-1}(z) \\ &= \underline{G}_{ZE}(z)\underline{F}^{-1}(z) \quad ,\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$\underline{F}(z) = \underline{I} + \underline{G}_{RU}(z) \quad , \tag{3.3.4}$$

$$\underline{G}_{ZA}(z) = [\underline{I}+\underline{G}(z)\underline{F}^{-1}(z)\underline{G}_{RY}(z)]^{-1} \quad , \tag{3.3.5}$$

$$\begin{aligned}\underline{G}_{ZE}(z) &= [\underline{I}+\underline{G}(z)\underline{F}^{-1}(z)\underline{G}_{RY}(z)]^{-1}\underline{G}(z) \\ &= \underline{G}_{ZA}(z)\underline{G}(z) \quad .\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Aus Gl.(3.3.3) kann

$$\underline{G}_{RY}(z) = \underline{G}_O^{-1}(z) - \underline{F}(z)\,\underline{G}^{-1}(z) \tag{3.3.6a}$$

bestimmt werden.

Für den Vektor der Stellgrößen wird definiert

$$\underline{U}(z) = \underline{G}'_{Ug}(z)\,\underline{W}'(z) + \underline{G}_{UE}(z)\,\underline{Z}_E(z) + \underline{G}_{UA}(z)\underline{Z}_A(z) \quad . \tag{3.3.7}$$

$\underline{W}'(z)$ ist das Ausgangssignal des Vorfilters $\underline{G}_V(z)$. Für Gl.(3.3.7) lassen sich die Übertragungsmatrizen errechnen als

$$\underline{G}'_{Ug}(z) = \underline{G}^{-1}(z)\,\underline{G}_O(z) \quad , \tag{3.3.8}$$

$$\underline{G}_{UE}(z) = \underline{G}^{-1}(z)\underline{G}_{ZE}(z) - \underline{I}$$

und

$$\underline{G}_{UA}(z) = \underline{G}_{UE}(z)\underline{G}^{-1}(z) \quad . \tag{3.3.10}$$

Für die Störübertragungsmatrix $\underline{G}_{ZE}(z)$ muß nun folgende Bedingung erfüllt sein:

- Jede Teilübertragungsfunktion von $\underline{G}_{ZE}(z)$ muß, damit Störungen ausgeregelt werden, mindestens eine Nullstelle bei $z = 1$ erhalten. Deshalb wird angesetzt

$$\begin{aligned}\underline{G}_{ZE}(z) &= \underline{G}_O(z)\,\underline{F}(z) = \underline{G}_O(z)\,[\underline{I}+\underline{G}_{RU}(z)] \\ &= \underline{G}_O(z)\,(1-z^{-1})\underline{K}'_Z(z) \quad ,\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

wobei $\underline{K}'_Z$ Polynome enthält, die in einem späteren Entwurfsschritt festgelegt werden.

Für die Inverse der Streckenübertragungsmatrix $\underline{G}(z)$ wird für die weiteren Überlegungen folgende Darstellung zugrundegelegt:

$$\underline{G}^{-1}(z) = \frac{1}{HN(z)} G^*(z) \quad . \tag{3.3.12}$$

Hierbei ist $HN(z)$ ein Polynom in z^{-1} und $G^*(z)$ eine Polynommatrix. Da die Stellgrößen sowohl bei der Führungsregelung als auch bei der Störungsregelung Deadbeat-Verhalten haben müssen, wird

$$\underline{G}_O(z) = HN(z)\underline{G}'_O(z) \tag{3.3.13}$$

gesetzt. Hierfür ist Voraussetzung, daß $HN(z)$ nur Nullstellen im Einheitskreis besitzt. Für die Stellgrößen folgt daraus

$$\underline{G}'_{Uq}(z) = \underline{G}^*(z)\underline{G}'_O(z) \tag{3.3.14}$$

und

$$\underline{G}_{UE}(z) = \underline{G}^*(z)\underline{G}'_O(z)\underline{F}(z) - \underline{I} \quad . \tag{3.3.15}$$

Das Störverhalten wird beschrieben durch

$$\underline{G}_{ZE}(z) = HN(z)(1-z^{-1})\underline{G}'_O(z)\ \underline{K}'_Z(z) \tag{3.3.16}$$

und

$$\underline{G}_{ZA}(z) = (1-z^{-1})\underline{G}'_O(z)\ \underline{K}'_Z(z)\ \underline{G}^*(z) \quad . \tag{3.3.17}$$

Wenn $G'_O(z)$, $F(z)$ und damit $K'_Z(z)$ Polynommatrizen sind, dann ist für $G'_{Uq}(z)$, $G_{UE}(z)$ und $G_{ZE}(z)$ die Deadbeat-Bedingung erfüllt.

Aus Gl.(3.3.11) folgt mit dem Ansatz

$$\underline{I} + \underline{G}_{RU}(z) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{g_{U1}(z)}{\lambda_1(z)} & & \underline{O} \\ & \ddots & \\ \underline{O} & & 1 + \frac{g_{Ur}(z)}{\lambda_r(z)} \end{bmatrix} =$$

$$(1-z^{-1})K'_Z(z) = \begin{bmatrix} (1-z^{-1})\frac{Z_{Z1}(z)}{N_{Z1}(z)} & & \underline{O} \\ & \ddots & \\ \underline{O} & & (1-z^{-1})\frac{Z_{Zr}(z)}{N_{Zr}(z)} \end{bmatrix} . \tag{3.3.18}$$

Setzt man in

$$\frac{g_{Ui}(z)}{\lambda_i(z)} = (1-z^{-1})\,\frac{Z_{Zi}(z)}{N_{Zi}(z)} - 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, r \tag{3.3.19}$$

für die Übertragungsfunktionen

$$K'_{Zi}(z) = \frac{\ldots}{\alpha_0+\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}+\ldots} \tag{3.3.20}$$

wird die innere Regelschleife rechentechnisch realisierbar, wenn für die Polynomkoeffizienten aus Gl.(3.3.20) die Minimal-Bedingung $\ldots$ erfüllt ist. Der Rest der Koeffizienten ist hier noch frei, um anderweitige regelungstechnische Bedingungen zu erfüllen.

Zur Normalform der regulären Bedingungen wird Gl.(3.3.16) und die rechte Seite von Gl.(3.3.18) dargestellt als

$$\underline{G}_{ZE}(z) = HN(z)(1-z^{-1})\underline{G}'_O(z)\,\frac{1}{\prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)}\,\underline{M}_\lambda(z) \tag{3.3.21}$$

mit

$$\underline{M}_\lambda(z) = \begin{bmatrix} Z_{Z1}(z)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{r} N_{Zi}(z) & & \underline{O} \\ & \ddots & \\ \underline{O} & & Z_{Zr}(z)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{r} N_{Zi}(z) \end{bmatrix} . \tag{3.3.22}$$

Da $\underline{G}_{ZE}(z)$ nur Polynome in z^{-1} enthalten darf, muß $\underline{G}'_O$ die Bedingung

$$\underline{G}'_O(z) = \prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)\;\underline{G}''_O(z) \tag{3.3.23}$$

erfüllen, wobei die Polynome $N_{Zi}(z)$ nur Nullstellen im Einheitskreis enthalten und $\underline{G}''_O(z)$ eine frei wählbare Polynommatrix darstellt. Gl.(3.3.13) ergibt dann

$$\underline{G}_O(z) = HN(z)\prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)\;\underline{G}''_O(z) \quad . \tag{3.3.24}$$

Damit ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (3.3.8), (3.3.9), (3.3.21) und (3.3.23) für die Stellgrößen

$$\underline{G}'_{Ug}(z) = \underline{G}^*(z) \prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)\underline{G}''_o(z) \qquad (3.3.25)$$

und

$$\underline{G}_{UE}(z) = \underline{G}^*(z)(1-z^{-1})\underline{G}''_o(z)\underline{M}_\lambda(z) - \underline{I} \quad . \qquad (3.3.26)$$

Als Zwischenergebnisse sind für die Stör- und Führungssignale folgende Übertragungsmatrizen ermittelt worden:

$$\underline{G}_{ZE}(z) = HN(z)(1-z^{-1})\underline{G}''_o(z)\underline{M}_\lambda(z) \quad , \qquad (3.3.27)$$

$$\underline{G}_{ZA}(z) = (1-z^{-1})\underline{G}''_o(z)\underline{M}_\lambda(z)\underline{G}^*(z) \qquad (3.3.28)$$

und

$$\underline{G}_W(z) = HN(z) \prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)\underline{G}''_o(z)\ \underline{G}_V(z) \quad . \qquad (3.3.29)$$

Die Polynommatrix $\underline{G}''_o(z)$ kann nun wiederum, wie bereits in Abschnitt 3.2 beschrieben, analog zu Gl.(3.2.7) definiert werden. $\underline{G}''_o(z)$ hat dann in den Zeilen jeweils identische Übertragungsfunktionen, die sich nur durch multiplikative Anteile unterscheiden.

3.3.2 Berücksichtigung von Stellgrößenbegrenzungen

Der Stellgrößenvektor $\underline{U}_W(z)$ ist nach Gl.(3.3.7) gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{U}_W(z) &= \underline{G}'_{Ug}(z)\ \underline{W}'(z) = \underline{G}'_{Ug}(z)\underline{G}_V(z)\underline{W}(z) \\ &= \underline{G}^{-1}(z)\underline{G}_o(z)\underline{G}_V(z)\underline{W}(z) \qquad (3.3.30) \\ &= \underline{G}^{-1}(z)\cdot\underline{G}_W(z)\underline{W}(z) \quad . \end{aligned}$$

Hier soll nun zuvor der Fall betrachtet werden, daß ein Vorfilter entworfen wird, das die Regelgrößen stationär entkoppelt. Bei sprungförmigen Führungsgrößen muß für die stationären Endwerte gelten

$$\lim_{z\to 1} \underline{G}_W(z) = \lim_{z\to 1} \underline{G}_o(z)\underline{G}_V(z) = \underline{I} \quad . \qquad (3.3.31)$$

In diesem Fall kann angesetzt werden:

$$\underline{G}''_o(z) = \underline{K}_{g\lambda}(z)\ \underline{K} \quad , \qquad (3.3.32)$$

mit der diagonalen Polynommatrix $\underline{K}_{g\lambda}(z)$ und der konstanten Matrix $\underline{K}$. $\underline{G}_o''(z)$ enthält in den Zeilen identische Übertragungsfunktionen, die sich durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Aus den Gleichungen (3.3.31), (3.3.32) und (3.3.24) läßt sich berechnen

$$\underline{G}_V = \lim_{z\to 1} \underline{G}_o^{-1}(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{HN(z) \prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)} \underline{K}^{-1} \underline{K}_{g\lambda}^{-1}(z) \quad . \qquad (3.3.33)$$

Daraus erhält man die Führungsübertragungsmatrix

$$\underline{G}_W(z) = \frac{HN(z) \prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)}{HN(1) \prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(1)} \underline{K}_{g\lambda}(z) \underline{K}_{g\lambda}^{-1}(1) \quad . \qquad (3.3.34)$$

Setzt man nun die Matrix aus Gl.(3.3.34) in Gl.(3.3.30) ein, so erhält man

$$\underline{G}_{Ug}(z) = \underline{G}_o'(z) \underline{G}_V(z) \underline{G}^{-1}(z) \underline{G}_W(z) = \frac{\prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)}{HN(1) \prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(1)} \underline{G}^*(z) \underline{K}_{g\lambda}(z) \underline{K}_{\lambda}^{-1}(1). \qquad (3.3.35)$$

Die Stellgrößen $\underline{u}_W(k)$ zum Zeitpunkt k = 0 lassen sich somit zu

$$\underline{u}_W(o) = \lim_{z\to\infty} \underline{G}_{Ug}(z) \frac{1}{1-z^{-1}} \underline{W}_o$$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{\prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)}{HN(1) \prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(1)} \underline{G}^*(z) \underline{K}_{g\lambda}(z) \underline{K}_{g\lambda}^{-1}(1) \underline{W}_o \qquad (3.3.36)$$

berechnen. In Gl.(3.3.32) war $\underline{G}_o''(z)$ als frei wählbare diagonale Polynommatrix eingeführt worden. Hierfür wird nun gesetzt

$$\underline{K}_{g\lambda}(z) = \underline{B}_K(z) \underline{P}(z) \quad , \qquad (3.3.37)$$

wobei Gl.(3.3.36) sich erweitern läßt zu

$$\underline{u}_W(o) = \lim_{z\to\infty} Q(z) \underline{G}^*(z) \underline{B}_K(z) \underline{P}(z) \underline{P}^{-1}(1) \underline{B}_K^{-1}(1) \underline{W}_o \quad ; \qquad (3.3.38)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in dieser Gleichung das Polynom Q(z), das gegeben ist durch

$$\underline{Q}(z) = \frac{\prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(z)}{HN(1) \prod_{i=1}^{r} N_{Zi}(1)} = \frac{Z_Q(z)}{K_Q} \tag{3.3.39}$$

eingeführt. Die Aufgabe besteht nun darin, $\underline{R}_K(z)$ bei vorgegebenem $\underline{u}_W(o)$ festzulegen. Zur Auswertung von Gl.(3.3.38) wird für die Polynommatrix $\underline{G}^*(z)$ eingeführt

$$\lim_{z\to\infty} \underline{G}^*(z) = \underline{G}_o^* \quad . \tag{3.3.40}$$

Weiterhin können mit Hilfe von Gl.(3.3.20) die Übertragungsfunktionen $K'_{Zi}(z)$ so normiert werden, daß die Polynome $N_{Zi}(z)$ wie folgt dargestellt werden können:

$$N_{Zi}(z) = 1 + \alpha'_1 z^{-1} + \alpha'_2 z^{-2} + \ldots \quad . \tag{3.3.41}$$

Damit ist

$$\lim_{z\to\infty} Q(z) = \frac{1}{K_Q} \quad . \tag{3.3.42}$$

Für die frei wählbare Diagonal-Polynommatrix $\underline{P}(z)$ wird als Grenzwert angesetzt

$$\lim_{z\to\infty} \underline{P}(z) = \underline{P}_o \quad . \tag{3.3.43}$$

Mit

$$\underline{B}_K(z) = \begin{bmatrix} 1+b_{K1}z^{-1} & & \underline{O} \\ & \ddots & \\ \underline{O} & & 1+b_{Kr}z^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.3.44}$$

läßt sich unter Berücksichtigung der Gln.(3.3.40) bis (3.3.44) Gl. (3.3.38) schreiben als

$$\underline{u}_W(o) = \frac{1}{K_Q} \underline{G}_o^* \underline{P}_o \underline{P}^{-1}(1) \underline{B}_K^{-1}(1) \underline{W}_o \quad . \tag{3.3.45}$$

Durch Matrizenmultiplikation kann nun die Matrix

$$\underline{R} = \frac{1}{K_Q} \underline{G}_o^* \underline{P}_o \underline{P}^{-1}(1) \tag{3.3.46}$$

gewonnen werden. Damit ist

$$\underline{u}_W(o) = \underline{R} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1+b_{K1}} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \frac{1}{1+b_{Kr}} \end{bmatrix} \underline{W}_o \quad . \tag{3.3.47}$$

Die Faktoren $\frac{1}{1+b_{Ki}}$ erscheinen somit in der i-ten Spalte von $\underline{R}$ und sind Teiler von W_{oi}. Die Bewertung der Stellgrößen kann nun so erfolgen, daß mit Hilfe der Koeffizienten b_{Ki} entweder die Haupt- oder die Nebendiagonalelemente entsprechend gewichtet werden. Die mitgekoppelten Stellgrößen werden ebenfalls um die in Gl.(3.3.47) angegebenen Faktoren verkleinert. Bei Durchführung einer Stellgrößenbegrenzung in obiger Weise wird die vorgegebene Einstellzeit um einen Abtastschritt erhöht.

Die Anwendung dieses Verfahrens und die Diskussion der Ergebnisse der Mehrgrößenregelung ist im Abschnitt 3.5 zu finden.

Die prinzipielle Vorgehensweise soll am Beispiel einer Regelstrecke mit der Übertragungsmatrix

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+s} & \frac{3}{s} \\ \frac{1}{1+2s} & \frac{1}{1+2s} \end{bmatrix}$$

diskutiert werden.

Durch z-Transformation und Berücksichtigung eines Haltegliedes nullter Ordnung erhält man mit der Abtastzeit von T = 1 die diskrete Darstellung

$$\underline{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1.264z^{-1}}{1-0.368z^{-1}} & \frac{3z^{-1}}{1-z^{-1}} \\ \frac{0.393z^{-1}}{1-0.607z^{-1}} & \frac{0.393z^{-1}}{1-0.607z^{-1}} \end{bmatrix} .$$

Die Anwendung von Gl.(3.3.12) liefert die Beziehungen

$$\underline{G}^{-1}(z) = \frac{1}{HN(z)} \begin{bmatrix} G^*_{11}(z) & G^*_{12}(z) \\ G^*_{21}(z) & G^*_{22}(z) \end{bmatrix}$$

mit $HN(z) = z^{-1}(-0.683-0.0632z^{-1})$,

$G^*_{11}(z) = 0.393-0.538z^{-1}+0.145z^{-2}$,

$G^*_{12}(z) = -(3-2.923z^{-1}+0.670z^{-2})$,

$G^*_{21}(z) = -G^*_{11}(z)$,

und

$G^*_{22}(z) = 1.264-2.031z^{-1}+0.767z^{-2}$.

Die Matrix $\underline{F}(z)$ nach Gl.(3.3.4) läßt sich, unter Berücksichtigung von Gl.(3.3.11) mit $\underline{K}'_Z(z) = \underline{I}$, im einfachsten Fall festlegen als

$$\underline{F}(z) = \underline{I} + \underline{G}_{RU}(z) = \begin{bmatrix} 1-z^{-1} & 0 \\ 0 & 1-z^{-1} \end{bmatrix} .$$

Daraus folgt für den Regler $\underline{G}_{RU}(z)$ nach Gl.(3.3.19)

$$\frac{g_{U1}(z)}{\lambda_1(z)} = \frac{g_{U2}(z)}{\lambda_2(z)} = -z^{-1} .$$

Damit sind die Störungsübertragungsmatrizen gegeben durch

$$\underline{G}_{ZE}(z) = \underline{G}_o(z)(1-z^{-1}) ,$$

und

$$\underline{G}_{ZA}(z) = \underline{G}_o(z)(1-z^{-1})\frac{1}{HN(z)}\,\underline{G}^*(z) .$$

Für $\underline{G}_o(z)$ werden nun die Gleichungen (3.3.13), (3.3.23) und (3.3.32) angesetzt. Damit ist

$$\underline{G}_o(z) = HN(z)\underline{K}_{g\lambda}(z)\underline{K} .$$

Wird eine minimale Anzahl von Abtastschritten gefordert, so wird

$$\underline{K}_{g\lambda}(z) = \underline{I} .$$

mit der neuen gewählten Ansätzen und Gl. 3.3.6a) wird daraus die Reglermatrix

$$\underline{G}_{RY}(z) = \frac{1}{HN(z)} \left[\underline{K}^{-1} - (1-z^{-1})\ \underline{G}^{*}(z)\right] .$$

Die Summe der Koeffizientenmatrix $\underline{K}$ besteht aus den Absolutkoeffizienten der Polynome $G^{*}_{ij}(z)$:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 0.393 & -3 \\ -0.393 & 1.264 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1.851 & -4.393 \\ -0.57 & -0.576 \end{bmatrix} .$$

Mit Gl. 3.3.3.33) wird die Vorfiltermatrix $\underline{G}_V$ berechnet als

$$\underline{G}_V = \lim_{z \to 1} \underline{G}_O^{-1}(z) = \lim_{z \to 1} \frac{\cdot}{HN(z)}\ \underline{K}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.527 & 4.02 \\ 0.527 & -1.694 \end{bmatrix} .$$

Die Führungsübertragungsmatrix lautet somit

$$\underline{G}_W(z) = \underline{G}_O(z)\ \underline{G}_V(z) = HN(z)\underline{K}_{g\lambda}(z)\underline{K}\ \frac{1}{HN(1)}\ \underline{K}^{-1}$$

$$= \frac{HN(z)}{HN(1)}\ \underline{I}$$

$$= (0.915z^{-1} + 0.085z^{-2})\ \underline{I} .$$

Die folgenden Bilder 3.3.1 bis 3.3.4 zeigen die Ergebnisse einer Simulation, die sowohl Führungsgrößen als auch Störgrößen berücksichtigt. Dargestellt sind jeweils die Übergangsfunktionen der Regelgrößen $h_y(t)$ und der Stellgrößen $h_u(k)$.

3.4 Kompensationsregelung mit Vorgabe des Störverhaltens und Modellansatz

3.4.1 Indirekte Kompensation

In diesem Abschnitten wird die von P. Klubnikin für Eingrößensysteme entwickelte und in [7] dargestellte Regelkreisstruktur betrachtet. Diese Struktur ist in Bild 3.4.1 dargestellt.

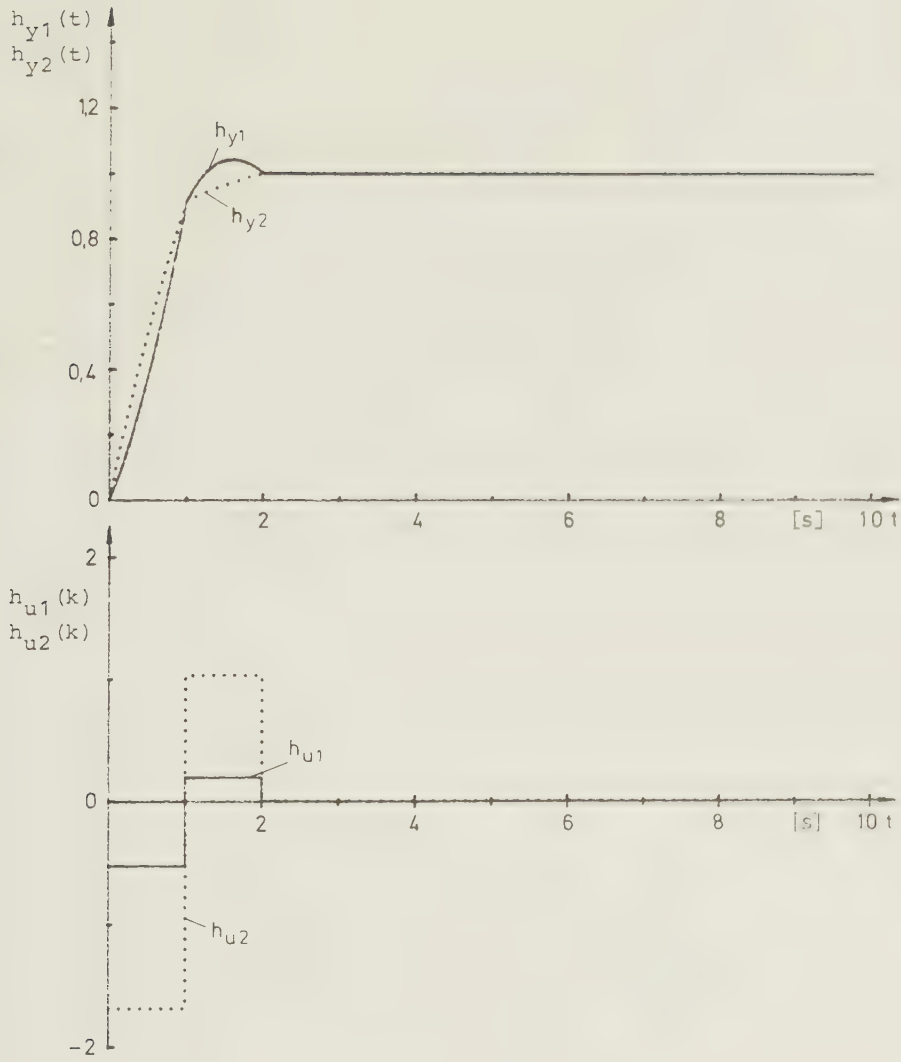


Bild 3.3.1. Übergangsfunktionen
$h_{y1}(t)$ und $h_{u1}(k)$ für $w_1 = s(t)$ und $w_2 = 0$
$h_{y2}(t)$ und $h_{u2}(k)$ für $w_1 = 0$ und $w_2 = s(t)$

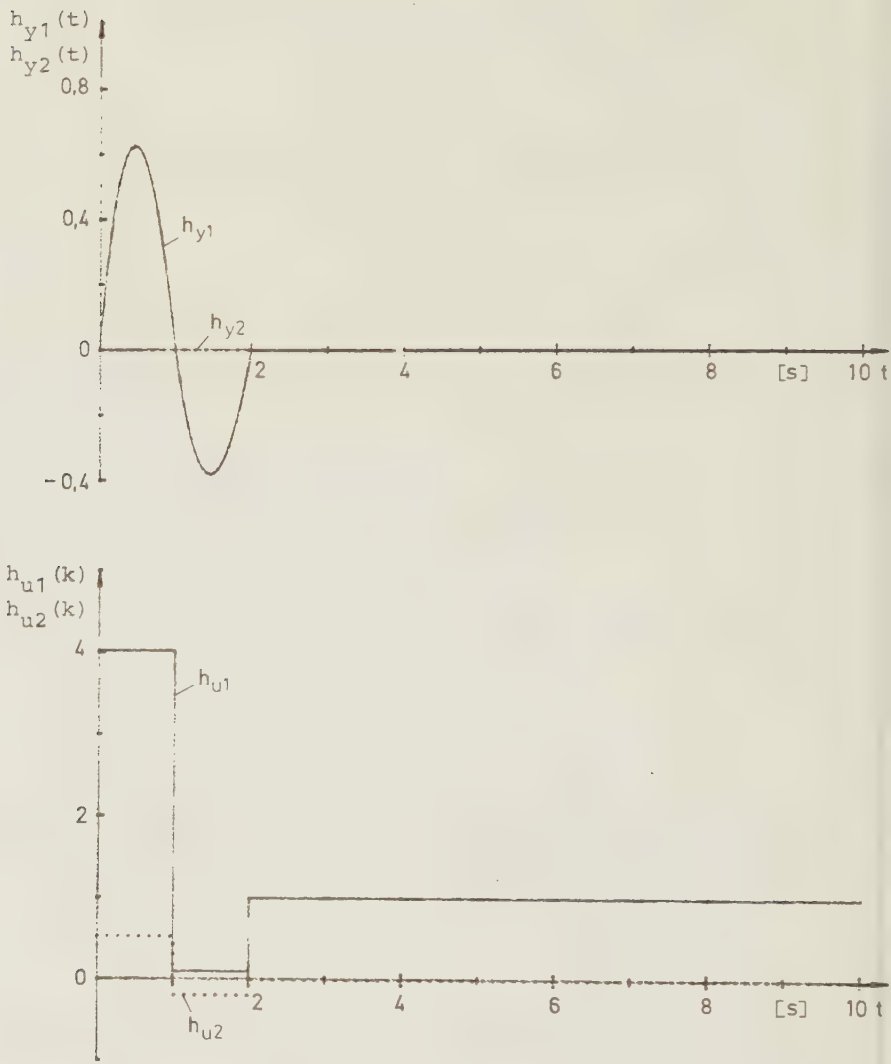


Bild 3.3.2. Übergangsfunktionen

$h_{y1}(t)$ und $h_{u1}(k)$ für $w_1 = 0$ und $w_2 = s(t)$

$h_{y2}(t)$ und $h_{u2}(k)$ für $w_1 = s(t)$ und $w_2 = 0$

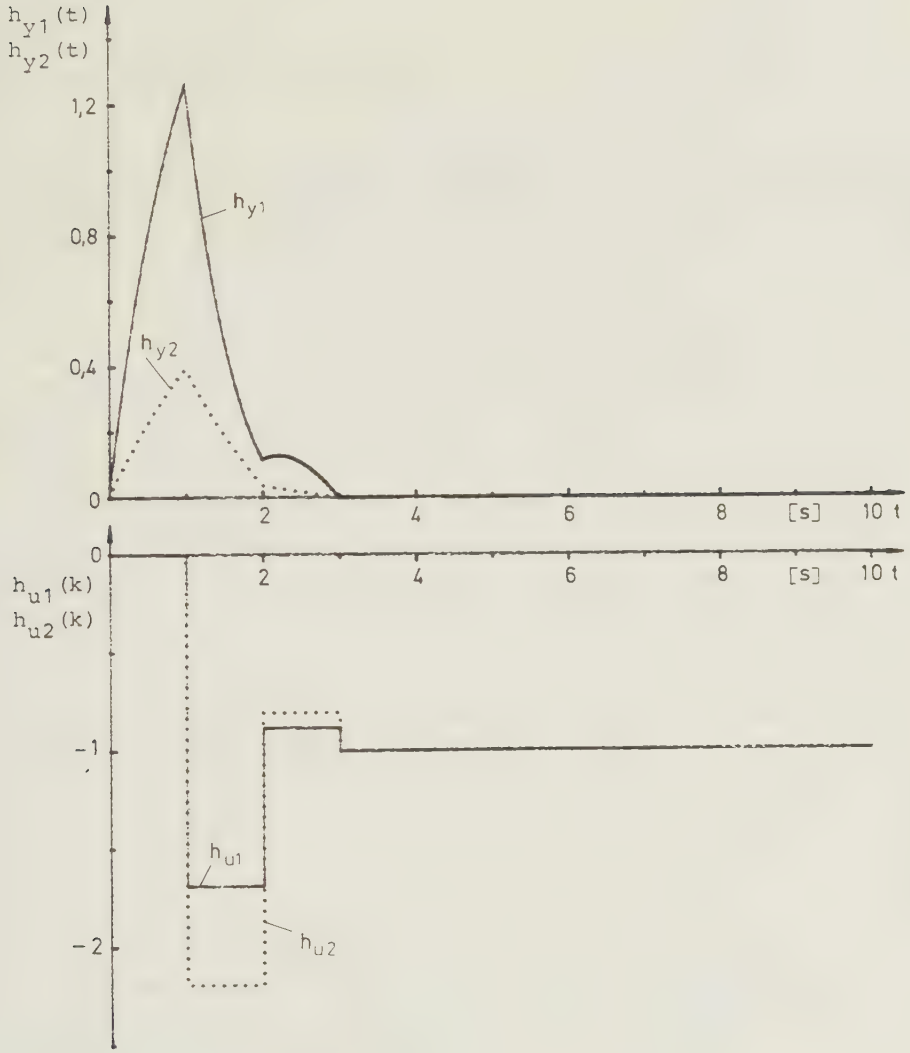


Bild 3.3.3. Übergangsfunktionen
$h_{y1}(t)$ und $h_{u1}(k)$ für $z_{E1} = s(t)$ und $z_{E2} = 0$
$h_{y2}(t)$ und $h_{u2}(k)$ für $z_{E1} = 0$ und $z_{E2} = s(t)$

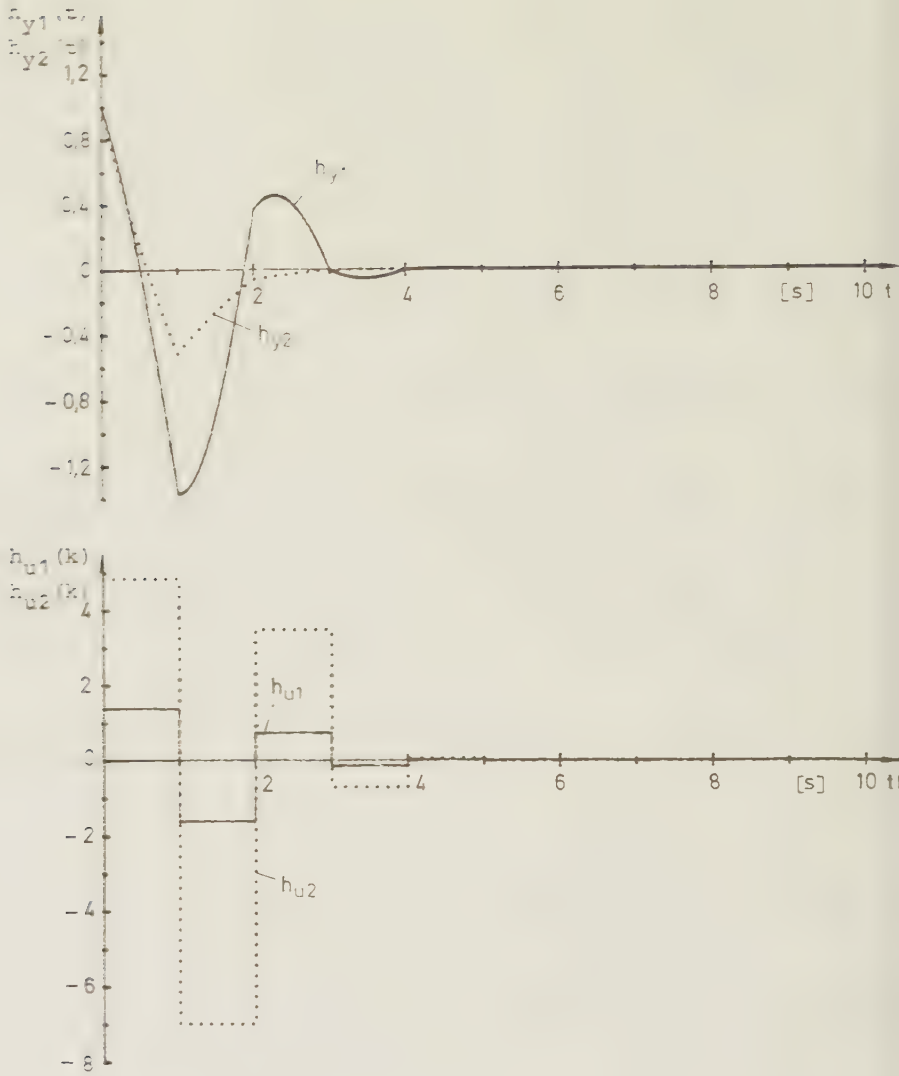


Bild 3.3.4. Übergangsfunktionen

$h_{y1}(t)$ und $h_{u1}(k)$ für $z_{A1} = s(t)$ und $z_{A2} = 0$

$h_{y2}(t)$ und $h_{u2}(k)$ für $z_{A1} = 0$ und $z_{A2} = 1$

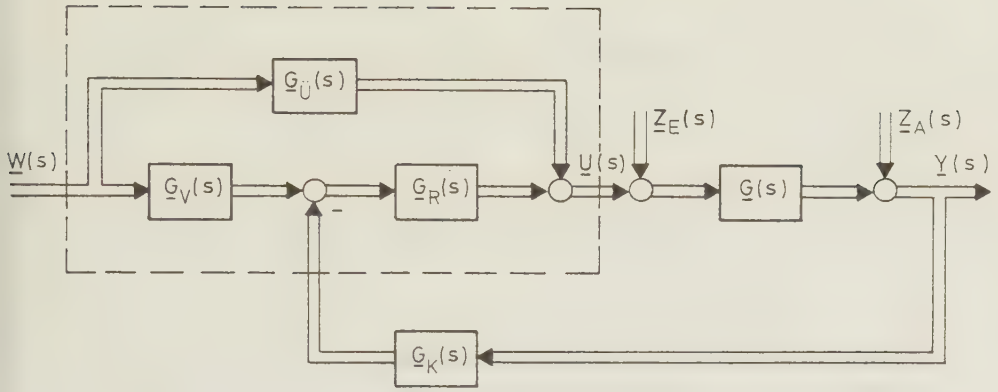


Bild 3.4.1. Regelkreisstruktur mit Ausgangsrückkopplung und Modellansatz

Das Übertragungsverhalten des Regelkreises in Abhängigkeit der Signale $\underline{W}(s)$, $\underline{Z}_E(s)$ und $\underline{Z}_A(s)$ ist gegeben durch

$$\underline{Y}(s) = \underline{G}_W(s)\ \underline{W}(s) + \underline{G}_{ZE}(s)\ Z_E(s) + \underline{G}_{ZA}(s)\ \underline{Z}_A(s) \tag{3.4.1}$$

$$\underline{G}_W(s) = \underline{G}'_O(s)\ [\underline{G}_R(s)\ \underline{G}_V(s) + \underline{G}_{\ddot{U}}(s)] \tag{3.4.2}$$

$$\underline{G}_{ZE}(s) = \underline{G}'_O(s) \tag{3.4.3}$$

$$\underline{G}_{ZA}(s) = \underline{G}'_O(s)\ \underline{G}^{-1}(s) \tag{3.4.4}$$

und

$$\underline{G}'_O(s) = [\underline{I} + \underline{G}(s)\ \underline{G}_R(s)\ \underline{G}_K(s)]^{-1}\ \underline{G}(s). \tag{3.4.5}$$

Um die wesentliche Idee bei der Festlegung von $\underline{G}_V(s)$, $\underline{G}_{\ddot{U}}(s)$ und $\underline{G}_R(s)$ zu zeigen, wird zu Anfang $\underline{G}_K(s) = \underline{I}$ gesetzt. Von der Regelung wird verlangt, daß das Führungsverhalten

$$\underline{G}_W(s) = \underline{K}_W(s) \tag{3.4.6}$$

vorgebbar und realisierbar ist.

Mit den Ansätzen

$$\underline{G}_V(s) = \underline{K}_W(s) \tag{3.4.7}$$

und

$$\underline{G}_{\ddot{u}}(s) = \underline{G}^{-1}(s)\ \underline{K}_W(s) \tag{3.4.8}$$

ergibt Gl.(3.4.2)

$$\underline{G}_W(s) = [\underline{I} + \underline{G}(s)\ \underline{G}_R(s)]^{-1}\ \underline{G}(s)\ [\underline{G}_R(s)\ \underline{K}_W(s) + \underline{G}^{-1}(s)\ \underline{K}_W(s)]$$

$$= \underline{K}_W(s). \tag{3.4.9}$$

Dieser Ansatz ist dann möglich, wenn in der Darstellung $\underline{G}^{-1}(s) = \frac{1}{HN(s)}\ \underline{G}^*(s)\ HN(s)$ nur Nullstellen in der linken s-Halbebene enthält, $\underline{G}_{\ddot{u}}(s)$ nach Gl.(3.4.3) realisierbar ist und $\det(\underline{I} + \underline{G}(s)\ \underline{G}_R(s))$ ebenfalls nur Wurzeln in der linken s-Halbebene enthält. Außerdem muß $\underline{G}(s)$ exakt bekannt sein. Als Ergebnis einer Identifikation oder Modellbildung ist in der Regel nur eine Näherung für $\underline{G}(s)$ bekannt, z. B. $\underline{H}(s)$ für $\underline{G}(s)$. Dann ist

$$\underline{G}_{\ddot{u}}(s) = \underline{H}^{-1}(s)\ \underline{K}_W(s), \tag{3.4.10}$$

$$\underline{H}^{-1}(s) = \frac{1}{HN_H(s)}\ \underline{H}^*(s) \tag{3.4.10a}$$

und

$$\underline{G}_W(s) = [\underline{I} + \underline{G}(s)\ \underline{G}_R(s)]^{-1}\ (\underline{G}(s)\ \underline{H}^{-1}(s) + \underline{G}(s)\ \underline{G}_R(s))\ \underline{K}_W(s). \tag{3.4.11}$$

In diesem Fall ist dann das geforderte Übertragungsverhalten nicht mehr durch $\underline{G}_V(s)$ gegeben, sondern durch $\underline{H}(s)$ und $\underline{G}(s)$. Wird für $\underline{K}_W(s)$ die diagonale Übertragungsmatrix

$$\underline{K}_W(s) = \begin{bmatrix} \frac{Z_{W1}(s)}{N_{W1}(s)} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \frac{Z_{Wr}(s)}{N_{Wr}(s)} \end{bmatrix} \tag{3.4.12}$$

gefordert, so muß aus Realisierbarkeitsbedingungen für Gl.(3.4.10) gefordert werden

$$\partial[N_{Wi}(s)]-\partial[Z_{Wi}(s)] \geq \partial_i[\underline{H}^*(s)] - \partial[HN_H(s)], \qquad (3.4.13)$$

wobei $\partial_i[\underline{H}^*(s)]$ hier wiederum den maximalen Grad der Polynome in der Spalte i von $\underline{H}^*(s)$ angibt.

Mit den oben gemachten Ansätzen kann nun die Auslegung des Regelkreises in folgenden Schritten vorgenommen werden:

Bei bekannten Regelstrecken wird mit Hilfe von $\underline{G}_R(s)$, z. B. mit Mehrgrößen-PID-Reglern, der Regelkreis stabilisiert und durch die Wahl von $\underline{K}_W(s)$ mit Hilfe der Gln.(3.4.7) und (3.4.8) das Führungsübertragungsverhalten festgelegt. Bei Regelstrecken mit Parameterunsicherheiten besteht die Möglichkeit, den Regelkreis "robust" in Hinsicht auf Stabilität, z. B. mit [23], [29], [15] oder [16] auszulegen und mit den Gln.(3.4.10), (3.4.10a) und (3.4.13) die restlichen Regelkreiselemente zu bestimmen. Da jedoch häufig das Störverhalten und das Führungsverhalten des Regelkreises von Bedeutung sind, gilt bei Vorgabe von $\underline{G}_{ZE}(s)$:

$$\underline{G}_R(s) = \underline{G}_{ZE}^{-1}(s) - \underline{G}^{-1}(s). \qquad (3.4.14)$$

Wird nun für das Störverhalten der Ansatz

$$\underline{G}_{ZE}(s) = \underline{\lambda}_{ZE}(s)\ \underline{K}(s) \qquad (3.4.15)$$

gemacht und Gl.(3.3.12) berücksichtigt, so folgt daraus

$$\underline{G}_R(s) = \underline{K}^{-1}(s)\ \underline{\lambda}_{ZE}^{-1}(s) - \frac{G^*(s)}{HN(s)}. \qquad (3.4.16)$$

In Gl.(3.4.15) ist $\underline{\lambda}_{ZE}(s)$ eine rationale, reguläre diagonale Übertragungsmatrix. Die Zählerpolynome der Teilübertragungsfunktionen von $\underline{\lambda}_{ZE}(s)$ müssen hierbei, damit Störungen ausgeregelt werden, mindestens eine Nullstelle bei $s = 0$ erhalten.

Anzumerken ist hier, daß $\underline{G}_{ZE}(s)$ nicht beliebig vorgebbar ist, sondern von der Struktur von $\underline{G}(s)$ und damit von $\underline{G}^{-1}(s)$ abhängt. Wählt man die Teilübertragungsfunktionen von $\underline{\lambda}_{ZE}(s)$ niedrigster Ordnung, so kann

$$\underline{K}(s) = \underline{K}, \tag{3.4.17}$$

also unabhängig von s, gewählt werden. Wird weiterhin det $\underline{K} \neq 0$ vorausgesetzt, so läßt sich beispielhaft für $r = 2$ mit

$$\underline{K}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{I11} & K_{I12} \\ K_{I21} & K_{I22} \end{bmatrix}, \quad \underline{\lambda}_{ZE}(s) = \begin{bmatrix} \frac{Z_{\lambda 1}(s)}{N_{\lambda 1}(s)} & 0 \\ 0 & \frac{Z_{\lambda 2}(s)}{N_{\lambda 2}(s)} \end{bmatrix} \text{ und } \underline{G}^*(s) = \begin{bmatrix} G^*_{11}(s) & G^*_{12}(s) \\ G^*_{21}(s) & G^*_{22}(s) \end{bmatrix} \tag{3.4.17a}$$

zeigen, daß

$$\underline{G}_R(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{I11} N_{\lambda 1}(s)\, HN(s) - Z_{\lambda 1}(s)\, G^*_{11}(s)}{Z_{\lambda 1}(s)\, HN(s)} & \frac{K_{I12} N_{\lambda 2}(s)\, HN(s) - Z_{\lambda 2}(s)\, G^*_{12}(s)}{Z_{\lambda 2}(s)\, HN(s)} \\ \frac{K_{I21} N_{\lambda 1}(s)\, HN(s) - Z_{\lambda 1}(s)\, G^*_{21}(s)}{Z_{\lambda 1}(s)\, HN(s)} & \frac{K_{I11} N_{\lambda 2}(s)\, HN(s) - Z_{\lambda 2}(s)\, G^*_{22}(s)}{Z_{\lambda 2}(s)\, HN(s)} \end{bmatrix}$$

nur dann realisierbar ist, wenn die Differenz zwischen maximalem Spaltengrad von $\underline{G}^*(s)$ und $HN(s)$ kleiner gleich 1 ist. Es gilt nämlich für die i-te Spalte von $\underline{G}_R(s)$

$$\partial[N_{\lambda i}(s)] - \partial[Z_{\lambda i}(s)] = \partial[G^*_{ij}(s)] - \partial[HN(s)]$$

und

$$\partial[Z_{\lambda i}(s)] + \partial[HN(s)] \geq \partial[Z_{\lambda i}(s)] + \partial[G^*_{ij}(s)] - 1. \tag{3.4.18}$$

Liegt die Graddifferenz höher, so muß der Ansatz nach Gl.(3.4.15) ausgeschlossen werden und zusätzliche Freiheitsgrade durch Einführung von $\underline{K}(s)$ geschaffen werden.

3.4.2 Synthese des Regelkreises mit direkter Kompensation

Ausgehend von Bild 3.4.1 wird unter Anwendung der Gln.(3.4.5), (3.4.7), (3.4.8) und (3.4.10)

$$\underline{G}(s)\ \underline{G}_R(s) = \underline{\lambda}(s) \tag{3.4.19}$$

angesetzt. Mit der rationalen, regulären, diagonalen Übertragungsmatrix $\underline{\lambda}(s)$ folgt dann

$$[\underline{I} + \underline{G}(s)\ \underline{G}_R(s)\ \underline{G}_K(s)] = [\underline{I} + \underline{\lambda}(s)\ \underline{G}_K(s)]. \tag{3.4.20}$$

Bei der Festlegung von $\underline{G}_K(s)$ ist deshalb zu berücksichtigen, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\det(\underline{I} + \underline{\lambda}(s)\ \underline{G}_K(s)) = 0 \tag{3.4.21}$$

in der linken s-Halbebene liegen müssen.

Die Übertragungsfunktionen $\lambda_i(s)$ müssen in Gl.(3.4.19) aus Realisierbarkeitsgründen so gewählt werden, daß die Differenz von maximalem Spaltengrad der i-ten Spalte von $\underline{G}^*(s)$ und HN(s) kleiner oder gleich der Differenz der Grade vom Nennerpolynom $N_{\lambda i}(s)$ und vom Zählerpolynom $Z_{\lambda i}(s)$ von $\lambda_i(s)$ ist, also

$$(\partial_i[\underline{G}^*(s)] - \partial[HN(s)])_{max} \leq \partial[N_{\lambda i}(s)] - \partial[Z_{\lambda i}(s)]. \tag{3.4.22}$$

Wenn $\underline{G}(s)$ entkoppelbar ist, d. h. $\det \underline{G}(s) \neq 0$ ist, somit die Inverse von $\underline{G}(s)$ in der Form $\underline{G}^{-1}(s) = \frac{1}{HN(s)}\ \underline{G}^*(s)$ darstellbar ist und HN(s) nur Nullstellen in der linken s-Halbebene aufweist, führen die Ansätze Gl.(3.4.19) und Gl.(3.4.21) auf einfach strukturierte Synthesegleichungen, die auf die in den nächsten Abschnitten beschriebenen Beispiele anwendbar sind. Hier ist für Gl.(3.4.19) unter Berücksichtigung von Gl.(3.4.22) der Ansatz

$$\underline{\lambda}(s) = \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_i}{s}\right), \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1,2 \tag{3.4.23}$$

möglich. Existiert analog zu den Gleichungen (3.4.10) und (3.4.10a) nur eine Näherung $\underline{H}(s)$ für $\underline{G}(s)$, so gilt mit $\underline{G}_R(s) = \underline{H}^{-1}(s) \cdot \underline{\lambda}(s)$ und $\underline{G}_K(s) = \underline{I}$:

$$\underline{G}_W(s) = [\underline{I} + \underline{G}(s)\ \underline{H}^{-1}(s)\ \underline{\lambda}(s)]^{-1}\ \underline{G}(s)\ \underline{H}^{-1}(s)\ [\underline{I} + \underline{\lambda}(s)]\ \underline{K}_W(s). \tag{3.4.24}$$

Die Faktoren λ_i können dann z. B. mit Hilfe einer Simulation den regelungstechnischen Anforderungen angepaßt werden, d. h. wesentlich das Störverhalten beeinflussen. Für $\underline{H}(s) = \underline{G}(s)$ ist ja, wie Gl.(3.4.24) zeigt, $\underline{G}_W(s) = K_W(s)$ unabhängig von $\underline{\lambda}(s)$.

Zum Abschluß dieses Kapitels seien einige grundsätzliche Bemerkungen gestattet. In den bisherigen Abschnitten des 3. Kapitels sind in allgemeiner Form Anforderungen an das Stör- und Führungsverhalten des Regelkreises gestellt und in Synthesemethoden umgesetzt worden, wobei zusätzliche Entwurfsanforderungen, wie z. B. Vorgabe der Regelkreisstruktur, Realisierungsaufwand, Stellgrößenvorgabe, leichte Änderbarkeit des vorgebbaren Führungsverhaltens und etwaige Reglerfeineinstellung vor Ort berücksichtigt wurden. Darüber hinaus existieren jedoch zahlreiche Zusatzbedingungen, wie z. B. Vorgabe von Reglerstrukturen in Form von PI- oder PID-Reglern, oder es kommen spezielle Stell- und Meßglieder zum Einsatz, die bei der Modellbildung der Streckenübertragungsmatrix berücksichtigt werden müssen.

Im folgenden Abschnitt 3.5 wird auf die unterschiedlichen Syntheseanforderungen anhand umfangreicher Beispiele eingegangen.

3.4.3 Synthese des Regelkreises mit Hilfe anderer Zerlegungsvorschriften

In [19] wird ebenfalls eine Struktur betrachtet, die in Bild 3.4.1 enthalten ist. Hier ist $\underline{G}_{\ddot{u}}(s) = \underline{O}$ und $\underline{G}_R(s) = \underline{I}$. Bei der Synthese des Regelkreises bleibt das Störverhalten unberücksichtigt, und es wird

ausschließlich das Führungsverhalten, das repräsentiert wird durch

$$\underline{G}_W(s) = [\underline{I} + \underline{G}(s)\ \underline{G}_K(s)]^{-1}\ \underline{G}(s)\ \underline{G}_V(s), \tag{3.4.25}$$

behandelt. Das Ziel ist es nun, mit Hilfe von

$$\underline{G}_K(s) = \underline{G}_V(s)\ \underline{G}_W^{-1}(s) - \underline{G}^{-1}(s) \tag{3.4.26}$$

allgemeingültige Realisierbarkeitsbedingungen für $\underline{G}_K(s)$ zu formulieren. Dies geschieht mit Hilfe der Zerlegungen

$$\underline{G}^{-1}(s) = \frac{1}{\rho(s)}\ \underline{P}(s) + \underline{Q}(s) \tag{3.4.27}$$

und

$$\underline{G}_W^{-1}(s) = \frac{1}{\beta(s)}\ \underline{M}(s) + \underline{N}(s). \tag{3.4.28}$$

Hierbei sind $\underline{P}(s)$, $\underline{Q}(s)$, $\underline{M}(s)$ und $\underline{N}(s)$ Polynommatrizen und $\rho(s)$ und $\beta(s)$ Polynome mit den Eigenschaften

$$\partial_i[\underline{P}(s)] < \partial[\rho(s)] \tag{3.4.29a}$$

und

$$\partial_i[\underline{M}(s)] < \partial[\beta(s)]. \tag{3.4.29b}$$

Somit läßt sich $\underline{G}_K(s)$ mit $\underline{G}_V(s) = \underline{G}_V$ schreiben als

$$\underline{G}_K(s) = \underline{P}_1(s) + \underline{G}_1(s) \tag{3.4.30a}$$

mit

$$\underline{P}_1(s) = \underline{G}_V\ \underline{N}(s) - \underline{Q}(s) \tag{3.4.30b}$$

und

$$\underline{G}_1(s) = \frac{1}{\beta(s)}\ \underline{G}_V\ \underline{M}(s) - \frac{1}{\rho(s)}\ \underline{P}(s). \tag{3.4.30c}$$

$\underline{P}_1(s)$ ist definitionsgemäß eine Polynommatrix und $\underline{G}_1(s)$ eine realisierbare Übertragungsmatrix, wobei rang $\underline{P}(s)$ = rang $\underline{M}(s)$ vorausgesetzt werden muß. Gl.(3.4.30a) impliziert drei signifikante Fälle:

Fall 1: $\underline{G}_1(s) = O$, d. h. $\underline{P}_1(s) = \underline{P}_1$ muß eine konstante Matrix sein, unabhängig von s mit $\partial_i[\underline{N}(s)] = \partial_i[\underline{Q}(s)]$ und

$$\frac{\beta(s)\ \underline{P}(s)}{\rho(s)} = \underline{G}_V\ \underline{M}(s). \tag{3.4.31}$$

Weiterhin muß $\rho(s)$ Teiler von $\beta(s)$ sein, also

$$\beta(s) = \alpha(s)\ \rho(s) \tag{3.4.32}$$

und somit

$$\partial_i[\alpha(s)\ \underline{P}(s)] = \partial_i[\underline{M}(s)]. \tag{3.4.33}$$

Voraussetzung hierfür ist, daß $\rho(s)$ nur Nullstellen in der linken s-Halbebene enthält. $\underline{G}_V(s)$ ist durch Gl.(3.4.31) bereits festgelegt, so daß hier keine weiteren Freiheitsgrade zur Verfügung stehen. Zur Feststellung der Realisierbarkeit sind zwei weitere Fälle denkbar, nämlich

Fall 2: $\underline{P}_1(s) = \underline{O}$, $\underline{G}_1(s) \neq O$ und

Fall 3: $\underline{P}_1(s) \neq O$, $\underline{G}_1(s) \neq O$.

Bei Vorgabe von $\underline{G}_W(s)$ ist im Fall 2 das Vorfilter festgelegt durch

$$\underline{G}_V\ \underline{N}(s) = \underline{Q}(s). \tag{3.4.34}$$

Die Synthese des Regelkreises wird dann so vorgenommen, daß mit Hilfe der Zerlegungsvorschrift nach Gl.(3.4.27) überprüft wird, ob einer der drei Fälle bei der Vorgabe von $\underline{G}_W(s)$ realisierbar ist.

Zusätzlich hierzu bietet sich für Fall 1 an, zu untersuchen, ob die Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ mit Hilfe des Stellgesetzes

$$\underline{U}(s) = \underline{G}_V\ \underline{W}(s) - \underline{G}_K\ \underline{Y}(s) \tag{3.4.35}$$

entkoppelbar ist. Hierzu wird mit Hilfe der i-ten Reihe von $\underline{G}(s)$, also $\underline{G}_i(s)$, n_i so bestimmt, daß die Grenzwerte $\lim_{s\to\infty} s^{n_i}\, \underline{G}_i(s)$ endlich und ungleich Null sind. Die Entkopplungsmatrix $\underline{B}^*$ ist dann gegeben durch

$$\underline{B}^* = \lim_{s\to\infty} \operatorname{diag} \left[s^{n_i} \right] \underline{G}(s). \tag{3.4.36}$$

Das Stellgesetz Gl.(3.4.35) mit $\underline{G}_V$ und $\underline{G}_K$ als reelle konstante Matrizen entkoppelt $\underline{G}(s)$, wenn $\underline{B}^*$ nichtsingulär ist und die Matrix

$$\underline{B}^*\, \underline{G}^{-1}(s) = \frac{1}{\rho(s)}\, \underline{B}^*\, \underline{P}(s) + \underline{B}^*\, \underline{Q}(s) \tag{3.4.37}$$

in den Nebendiagonalen nur reelle Koeffizienten enthält. Der Beweis hierzu ist in [41] enthalten.

Unterscheidet man weiterhin die Fälle, daß m die Anzahl der Eingangsgrößen und ℓ die Anzahl der Ausgangsgrößen von $\underline{G}(s)$ sind, so gilt unter der Annahme, daß $\underline{G}_W(s)$ seinen größten Rang hat (d. h. wenigstens eine mögliche Determinante von $\underline{G}_W(s)$ von der Dimension min (ℓ,m) ist) für $\ell < m$:

$$\operatorname{rang}\, \underline{G}_W(s) = \ell. \tag{3.4.38}$$

Zur Bildung der Inversen wird die "Rechtsinverse" von $\underline{G}(s)$

$$\underline{G}_W(s)\, \underline{G}_W^R(s) = \underline{I}_\ell \tag{3.4.39}$$

definiert. Die Pseudoinverse

$$\underline{G}_W^R(s) = \underline{G}_W^T(s)\, [\underline{G}_W(s)\, \underline{G}_W^T(s)]^{-1} = \frac{1}{\beta(s)}\, \underline{M}(s) + \underline{N}(s) \tag{3.4.40}$$

erfüllt diese Gleichung. Für $\ell > m$ muß gelten

$$\operatorname{rang}\, \underline{G}_W(s) = m. \tag{3.4.41}$$

Mit der "Linksinversen"

$$\underline{G}_W^L(s)\ \underline{G}_W(s) = \underline{I}_m \tag{3.4.42}$$

erhält man analog zu Gl.(3.4.40)

$$\underline{G}_W^L(s) = [\underline{G}_W^T(s)\ \underline{G}_W(s)]^{-1}\ \underline{G}_W^T(s) = \frac{1}{\beta(s)}\ \underline{M}(s) + \underline{N}(s) \tag{3.4.43}$$

3.5 Ergebnisse der Regelung von Mehrgrößensystemen

Bei der Anwendung der verschiedenen Synthesemethoden stand im Vordergrund, die Leistungsfähigkeit der Verfahren anhand unterschiedlicher Testprozesse zu überprüfen und die Ergebnisse mit denen anderer Entwurfsverfahren zu vergleichen. Als Testprozeß wurde aus [5] das mathematische Modell der Regelstrecke

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1.2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}$$

gewählt und wird im folgenden mit TS1 bezeichnet. Das zweite Strekkenmodell (TS2) ist in [18] enthalten und in [27] mit Hilfe des erweiterten INA-Verfahrens [3] geregelt worden. Bei diesem System handelt es sich um den Dampferzeuger des SNR 300, der aus Verdampfer, Abscheideflasche und Überhitzer besteht. Die Regelgrößen des Systems sind der Frischdampfdurchsatz $\dot{M}_{FD}$ und die Frischdampftemperatur ϑ_{FD}. Als Stellgrößen werden betrachtet Sekundärdurchsatz $\dot{m}_{Sek}$ und die Speisewassertemperatur ϑ_{SP}. Die sekundärseitige Dampferzeugereintrittstemperatur $\vartheta_{DESekEin}$, der Speisewasserdurchsatz $\dot{m}_{SP}$ und die Änderung des Frischdampfdruckes p_{FD} sind die Störgrößen. Die Anforderungen an die Regelung werden analog zu [27] formuliert:

- Der Frischdampfdurchsatz $\dot{M}_{FD}$ soll dem von der Blockleitebene vorgegebenen Sollwert möglichst "schnell" und gut gedämpft folgen.

- Die auftretende Abweichung der Frischdampftemperatur ϑ_{FD} vom Sollwert 500°C soll möglichst gut ausgeregelt werden.

- Die Auswirkungen von Störungen durch Änderungen des Frischdampfdrucks p_{FD}, des Frischdampfdurchsatzes $\dot{M}_{FD}$ und der Frischdampftemperatur ϑ_{FD} sind vollständig zu kompensieren.

Zur Modellbildung wurde stellvertretend der Betriebspunkt 75 % Last herangezogen. Das benutzte Blockschaltbild ist in Bild 3.5.1 dargestellt.

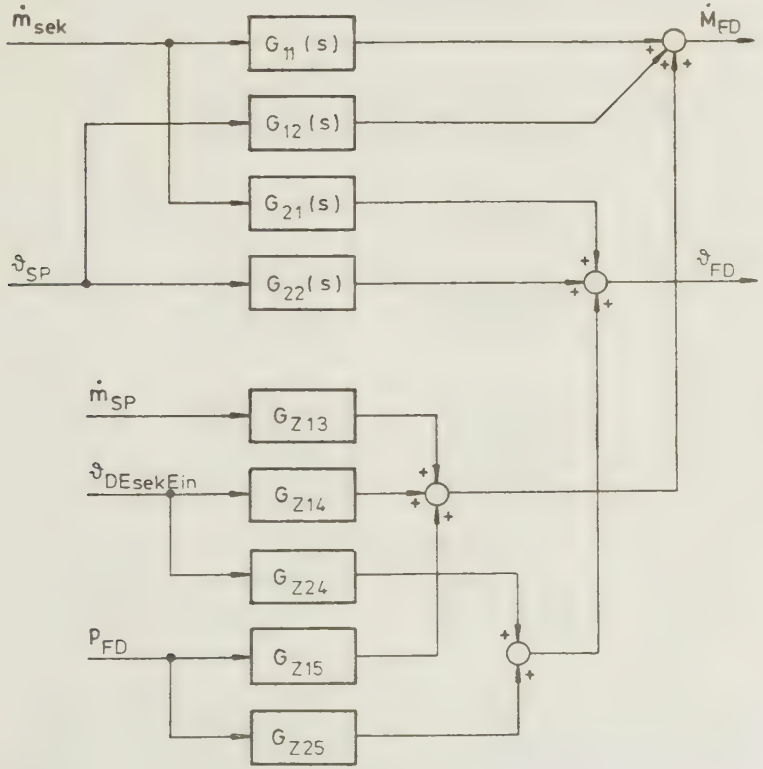


Bild 3.5.1. Struktur des Streckenmodells TS2

Die Streckenübertragungsmatrix lautet:

$G_{11}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
2.100000E-03	1.120000E-02	S ** 0
2.[illegible]E-02	4.[illegible]E-02	S ** 1
2.57[illegible]E-01	5.680000E-02	S ** 2
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 3

$G_{12}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
8.600000E-03	6.400000E-03	S ** 0
4.290000E-02	8.200000E-02	S ** 1
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 2

$G_{21}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
1.150000E-02	-1.490000E-02	S ** 0
7.220000E-02	-2.400000E-02	S ** 1
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 2

$G_{22}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
1.150000E-02	-3.000000E-03	S ** 0
7.220000E-02	-4.500000E-02	S ** 1
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 2

$G_{Z13}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
2.400000E-03	-1.700000E-03	S ** 0
1.990000E-02	8.500000E-03	S ** 1
2.735000E-01	6.019000E-01	S ** 2
5.597000E-01	1.860000E+00	S ** 3
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 4

$G_{Z14}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
1.400000E-03	1.050000E-02	S ** 0
1.030000E-02	-1.802000E-01	S ** 1
1.535000E-01	9.943000E-01	S ** 2
2.644000E-01	-3.990000E+00	S ** 3
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 4

$G_{Z15}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
8.700000E-03	0.000000E+00	S ** 0
4.290000E-02	1.200000E-01	S ** 1
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 2

$G_{Z24}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
2.100000E-03	3.940000E-02	S ** 0
2.470000E-02	4.030000E-01	S ** 1
2.552000E-01	4.[illegible]6000E+00	S ** 2
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 3

$G_{Z25}(s) =$

NENNER	ZAEHLER	
1.150000E-02	-1.070000E-02	S ** 0
7.220000E-02	-9.000000E-02	S ** 1
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 2
1.000000E+00	0.000000E+00	S ** 3

Nach [18] sind der Sekundärdurchsatz $\dot{m}_{Sek}$ und der Speisewasserdurchsatz $\dot{m}_{SP}$ auf 5 %, die Speisewassertemperatur ϑ_{SP} und die sekundärseitige Dampferzeugereintrittstemperatur $\vartheta_{DESekEin}$ auf 20 K und der Frischdampfdruck p_{FD} auf 5 bar normiert.

Zur Vereinheitlichung der Darstellung werden die angewandten Entwurfsverfahren wie folgt bezeichnet:

Kapitel 3.2: Reduzierte Struktur des Regelkreises: EV1
Kapitel 3.3: Entwurf für endliche Einstellzeit: EV2
Kapitel 3.4.1: Indirekte Kompensation: EV3
Kapitel 3.4.2: Direkte Kompensation: EV4
Kapitel 3.4.3: Weitere Zerlegungsvorschriften: EV5.

Für das System TS1 erhält man im Frequenzbereich

$$\underline{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1 + 0.8\ s + 0.8\ s^2}{s^2(s+1)} & \frac{5.2 + 5\ s + s^2}{s(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1.2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}.$$

Um die Reglersynthese zu vereinfachen, wurde in [28] ein Programm zur Inversion von Streckenübertragungsmatrizen erstellt. Die Inverse wird mit Hilfe des Austauschverfahrens nach [17] berechnet.

Für die Inverse von TS1 erhält man

$$G^*_{11}(s) = -30\ s^2,$$

$$G^*_{12}(s) = s(130 + 120\ s + 25\ s^2),$$

$$G^*_{21}(s) = s(50 + 25\ s)$$

$$G^*_{22}(s) = -25(2+s)(1+0.8\,s+0.8\,s^2)$$

$$HN(s) = s + 100.$$

Für eine Abtastzeit von T = 2 mit einem Halteglied nullter Ordnung folgt entsprechend

$$\frac{G^*_{11}(z)}{HN(z)} =$$

NENNER	ZAEHLER	
0.000000E+00	4.485872E-01	Z*** 0
-3.397196E+00	-5.364648E-01	Z*** 1
-3.007173E+00	3.271679E-01	Z*** 2
-3.851845E-01	6.070964E-02	Z*** 3

$$\frac{G^*_{12}(z)}{HN(z)} =$$

NENNER	ZAEHLER	
0.000000E+00	-3.966065E+00	Z*** 0
-3.397196E+00	3.485539E+00	Z*** 1
-3.007173E+00	5.132116E-01	Z*** 2
-3.851845E-01	-3.268505E-02	Z*** 3

$$\frac{G^*_{21}(z)}{HN(z)} =$$

NENNER	ZAEHLER	
0.000000E+00	-1.135335E+00	Z*** 0
-3.397196E+00	5.e213bbE-01	Z*** 1
-3.007173E+00	5.840794E-01	Z*** 2
3.851845E-01	-1.067936E-02	Z*** 3

$$\frac{G^*_{22}(z)}{HN(z)} =$$

NENNER	ZAEHLER	
0.000000E+00	2.464664E+00	Z*** 0
3.397196E+00	4.089924E-01	Z*** 1
-3.007173E+00	5.315424E-01	Z*** 2
-3.851845E-01	-9.887863E-13	Z*** 3

Für EV1 wird entsprechend [5] Gl.(3.2.7) und Gl.(3.2.12) im ersten Schritt angesetzt

$$\underline{G}_o(s) = \underline{K}_{g\lambda}(s)\,\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2+2s+2} \end{bmatrix} \underline{K}.$$

Mit Gl.(3.2.12) ist sichergestellt, daß die Inverse von $\underline{K}$ die Koeffizienten von $\underline{G}^*_{ij}(s)$ mit dem höchsten Grad enthält, also

$$\underline{K}^{-1} = \begin{bmatrix} -30 & 25 \\ 25 & -20 \end{bmatrix}.$$

Hiermit ist

$$\underline{G}_V = \underline{K}^{-1} \lim_{s \to 0} \underline{K}_{g\lambda}^{-1}(s) = 2\,\underline{K}^{-1} = \begin{bmatrix} -60 & 50 \\ 50 & -40 \end{bmatrix}$$

festgelegt. Im nächsten Schritt wird in Gl.(3.2.15), die das Störverhalten berücksichtigt, analog zu $\underline{G}_o(s)$

$$\underline{F}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s(s+a)}{2+2s+s^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{s(s+b)}{2+2s+s^2} \end{bmatrix}$$

angesetzt. $\underline{g}_u(s)$ ist entsprechend Gl.(3.2.16) hier ebenfalls als Diagonalmatrix eingeführt worden. Berücksichtigt sind sprungförmige Störungen am Eingang der Regelstrecke. Gl.(3.2.9) liefert hierzu die Reglerübertragungsmatrix

$$\underline{G}_{RU}(s) = \underline{F}(s) - \underline{I} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2+s(a-2)}{s^2+2s+2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-2+s(b-2)}{s^2+2s+2} \end{bmatrix}.$$

Für a = 99 und b = 101 wird $\underline{G}_{RY}(s)$ mit Hilfe von Gl.(3.2.11) zu

$G_{RY11}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
2.000000E+02	-1.200000E+04	S ** 0
2.020000E+02	-1.812000E+04	S ** 1
1.020000E+02	-1.215000E+04	S ** 2
1.000000E+00	-1.500000E+02	S ** 3

$G_{RY12}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
2.000000E+02	1.000000E+04	S ** 0
2.020000E+02	2.010000E+04	S ** 1
1.020000E+02	7.330000E+03	S ** 2
1.000000E+00	-2.305000E+03	S ** 3

$G_{RY21}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
2.000000E+02	1.000000E+04	S ** 0
2.020000E+02	1.510000E+04	S ** 1
1.020000E+02	5.150000E+03	S ** 2
1.000000E+00	2.500000E+01	S ** 3

$G_{RY22}(s)$ =

NENNER	ZAEHLER	
2.000000E+02	-8.000000E+03	S ** 0
2.020000E+02	-1.103000E+04	S ** 1
1.020000E+02	-9.545000E+03	S ** 2
1.000000E+00	-2.035000E+03	S ** 3

berechnet.

Die Ergebnisse einer Mehrgrößensimulation [20] zeigen (siehe hierzu Bild 3.5.2 und Bild 3.5.3), daß das Führungs- und Entkopplungsverhalten, dem Ansatz entsprechend, realisiert wird. Jedoch ist die Stellgrößendynamik nach [5] für das Führungsverhalten zu groß, so daß für das Führungsverhalten der Ansatz

$$\underline{K}_W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{4 + a_1 s}{4 + 4s + s^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1 + b_1 s}{1 + 2.15\, s + 1.75\, s^2 + s^3} \end{bmatrix}, \quad a_1 > 0,\ b_1 > 0$$

gemacht wird. Für $\underline{W}(s) \neq 0$ folgt mit Gl.(3.2.4) und Gl.(3.2.7)

$$\underline{U}(s) = \underline{G}^{-1}(s)\ \underline{G}_W(s)\ \underline{W}(s)$$

$$= \underline{G}^{-1}(s)\ \underline{K}_{g\lambda}(s)\ \underline{K}\ \underline{G}_V\ \underline{W}.$$

Für $t = 0$ ergibt sich hieraus

$$\underline{u}(0) = \begin{bmatrix} -30\ a_1 \\ 25\ a_1 \end{bmatrix} \quad \text{für } W_1(s) = \frac{1}{s},\ W_2(s) = 0$$

und

$$\underline{u}(0) = \begin{bmatrix} 25\ b_1 \\ \\ -20\ b_1 \end{bmatrix} \quad \text{für } W_1(s) = 0,\ W_2(s) = \frac{1}{s}.$$

Mit $a_1 = \frac{1}{30}$ und $b_1 = \frac{1}{25}$ ergibt der modifizierte Ansatz das Übergangsverhalten, das im Bild 3.5.4 dargestellt ist. Daraus wird deutlich, daß die Stellgröße im gesamten Bereich nur auf Kosten der Anregelzeit, d. h. "Schnelligkeit" des Systems, begrenzt werden kann.

Die Synthesemethode zeigt, daß die Lösungsansätze leicht modifiziert werden können und den jeweiligen Anforderungen in Hinsicht auf Führungsverhalten, Störungsverhalten und Stellgrößenbegrenzung angepaßt werden können.

In einer weiteren Untersuchung [28] ist für TS1 eine Deadbeat-Regelung mit minimaler Einstellzeit verlangt. Dies bedeutet, wie in Kapitel 3.3.1 gezeigt,

$$\underline{F}(z) = \underline{I} + \underline{G}_{RU}(z) = \begin{bmatrix} 1-z^{-1} & 0 \\ \\ 0 & 1-z^{-1} \end{bmatrix}$$

und somit

$$\underline{G}_{RU}(z) = \begin{bmatrix} -z^{-1} & 0 \\ \\ 0 & -z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Aus der Forderung nach minimaler Anzahl von Abtastschritten folgt auch

$$\underline{K}_{g\lambda}(z) = \underline{I},$$

womit im Ansatz

$$\underline{G}_o(z) = HN(z)\ \underline{K}_{g\lambda}(z)\ \underline{K}$$

die Inverse der Koeffizientenmatrix $\underline{K}$ wiederum nur aus den Absolutkoeffizienten der Polynome $G^*_{ij}(z)$ besteht:

$$\underline{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.44859 & -3.9661 \\ -1.1353 & 2.4647 \end{bmatrix}.$$

Die Reglermatrix $\underline{G}_{RY}(z)$ ist nach Gl.(3.3.6a) berechnet und ergibt die Teilübertragungsfunktionen

$G_{RY11}(z)$ =

NENNER	ZAEHLER	
-3.397196E+00	1.285052E+00	Z***0
-3.007173E+00	-1.163633E+00	Z***1
-0.385185E+00	0.266458E+00	Z***2
0.000000E+00	0.607096E-01	Z***3

$G_{RY12}(z)$ =

NENNER	ZAEHLER	
-3.397196E+00	-7.451605E+00	Z***0
-3.007173E+00	2.972323E+00	Z***1
-0.385185E+00	0.545898E+00	Z***2
0.000000E+00	-0.326861E-00	Z***3

$G_{RY21}(z)$ =

NENNER	ZAEHLER	
-3.397196E+00	-1.697470E+00	Z***0
-3.007173E+00	-0.219445E-01	Z***1
-0.385185E+00	0.594959E+00	Z***2
0.000000E+00	-0.136794E-01	Z***3

$G_{RY22}(z)$ =

NENNER	ZAEHLER	
-3.397196E+00	2.055672E+00	Z***0
-3.007173E+00	-0.122550E+00	Z***1
-0.385185E+00	0.541430E+00	Z***2
0.000000E+00	-0.988786E-02	Z***3

Schließlich ist mit Gl.(3.3.33)

$$\underline{G}_V = \lim_{z \to 1} \frac{1}{HN(z)} \; \underline{K}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.06607 & 0.58414 \\ 0.16722 & -0.363008 \end{bmatrix}$$

festgelegt und die Führungsübertragungsmatrix durch

$$\underline{G}_W(z) = \underline{G}_o(z)\, \underline{G}_V(z) = HN(z)\, \underline{K}_{g\lambda}(z)\, \underline{K}\, \frac{1}{HN(1)}\, \underline{K}^{-1}$$

$$= \frac{HN(z)}{HN(1)}\, \underline{I}$$

$$= z^{-1}(0.5004 + 0.44291\, z^{-1} + 0.05673\, z^{-2})\, \underline{I}$$

gegeben. Die Ergebnisse der Mehrgrößensimulation sind in den Bildern 3.5.5 bis 3.5.8 dokumentiert. Für die gewählte Abtastzeit von $T = 2$ ist nach Bild 3.5.5 der Einschwingvorgang innerhalb von 3 Abtastzeiten abgeschlossen. Die Untersuchung des Entkopplungsverhaltens (Bild 3.5.6) zeigt, daß das Führungsverhalten zwar zu den Abtastzeitpunkten vollständig entkoppelt, jedoch ungleich Null zwischen den ersten drei Abtastzeitpunkten ist. Da jedoch $|y_1(t)| \leq 0{,}1$ für $w_1 = 0$, $w_2 = s(t)$ gilt und $|y_2(t)| \leq 0.02$ für $w_1 = s(t)$, $w_2 = 0$ ist, kann auf eine weitere Erhöhung der Reglerordnung und damit auf eine Vergrößerung der Schrittzahl verzichtet werden. Die Anzahl der Abtastzeitpunkte bis zum Ausregeln von Störungen wird bestimmt durch

$$\underline{G}_{ZE}(z) = \underline{G}_o(z)\ \underline{F}(z) = \underline{G}_W(z)\ \underline{G}_V^{-1}\ \underline{F}(z)$$

$$= (1-z^{-1})\ HN(z)\ \underline{K}$$

und ist somit innerhalb von 4 Abtastschritten möglich. Die Übergangsfunktionen in den Bildern 3.5.7 und 3.5.8 zeigen, daß das maximale Überschwingen für $y_1(t)$ unter den Bedingungen $z_{E2}(t) = 0$ und $z_{E1}(t) = s(t)$ relativ groß ist. Dies kann sicherlich durch Verkleinerung der Abtastzeit reduziert werden. Jedoch ist, bei Vorgabe von minimaler Einstellzeit, immer ein Kompromiß zwischen der Stellgrössendynamik im Führungs- und im Störungsfall zu schließen.

Wendet man die Synthesemethode EV1 auf das System ST2 an, so beträgt die Graddifferenz zwischen $G^*_{ij}(s)$ und $HN(s)$ in jeder Spalte 1. Der Hauptnenner $HN(s)$ selbst ist ein Polynom 7. Grades. Hieraus resultieren für $\underline{G}_{RY}(s)$ Regler, die selbst 7. Ordnung sind und nach der Festlegung von Führungs- und Störverhalten keine weiteren Modifikationen zulassen. Die Regelkreissynthese wurde zwar in [20] durchgeführt, jedoch zeigten sich, wie schon in [27], keine zufriedenstellenden Regelergebnisse für das Störverhalten. Deshalb werden für das System TS2 die Syntheseverfahren EV3 bis EV5 ausgewählt. Mit ihnen ist, bei Wahl einer ordnungsreduzierten Näherung $H(s)$, die Beeinflussung des Führungsverhaltens mit Hilfe von $\underline{G}_{\ddot{u}}(s)$ nach Bild 3.4.1 leicht möglich. Zur Ermittlung von $\underline{H}(s)$ wird die Pol-Nullstellen-Darstellung von TS2 betrachtet:

$$G_{11}(s) = \frac{0.086(s + 0.2709 + j0.2384)(s + 0.2709 - j0.2384)}{(s + 0.194)(s + 0.0313 + j0.1)(s + 0.0313 - j0.1)} = \frac{Z_{11}(s)}{N_{11}(s)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{0.082(s + 0.078)}{(s+0.02145 + j0.09)(s+0.02145 - j0.09)} = \frac{Z_{12}(s)}{N_{12}(s)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{-0.024(s + 0.621)}{(s + 0.0361 + j0.1)(s + 0.0361 - j0.1)} = \frac{Z_{21}(s)}{N_{21}(s)}$$

$$G_{22}(s) = \frac{-0.045(s + 0.0667)}{(s + 0.0361 + j0.1)(s + 0.0361 - j0.1)} = \frac{Z_{22}(s)}{N_{22}(s)} .$$

Mit $H_{ij}(s) = \frac{Z_{Hij}(s)}{N_{Hij}(s)}$ stellt die Näherung

$$N_{H21}(s) = N_{H22}(s) = (s + 0.035 + j0.1)(s + 0.035 - j0.1)$$

und

$$N_{H11}(s) = N_{H22}(s)(s + 0.194)$$

eine Reduktion des Grades von HN(s) um 2 auf 5 dar. Die Inverse von $\underline{H}(s)$ lautet

$$\underline{H}^{-1}(s) = \frac{1}{HN_H(s)} \begin{bmatrix} H^*_{11}(s) & H^*_{12}(s) \\ H^*_{21}(s) & H^*_{22}(s) \end{bmatrix},$$

mit

$$\frac{H^*_{11}(s)}{HN_H(s)} =$$

NENNER	ZAEHLER	
4.130270E-05	2.992900E-05	S **
8.203801E-04	9.172110E-04	S ** 1
9.094279E-03	1.011700E-02	S ** 2
1.400310E-01	2.[illegible]	S ** 3
3.260550E-01	1.554500E+00	S ** 4
1.[illegible]	[illegible]	S ** 5
0.000000E+00	2.366000E+01	S ** 6

$$\frac{H^*_{12}(s)}{HN_H(s)} =$$

NENNER	ZAEHLER	
4.130270E-05	8.315140E-05	S ** 0
8.203801E-04	2.526900E-03	S ** 1
9.094279E-03	4.210000E-02	S ** 2
1.400310E-01	4.841300E-01	S ** 3
3.260550E-01	3.500000E+00	S ** 4
1.000000E+00	1.789400E+01	S ** 5
0.000000E+00	4.311230E+01	S ** 6

$$\frac{H^*_{21}(s)}{HN_H(s)} =$$

NENNER	ZAEHLER	
4.130270E-05	-1.486500E-04	S **
8.260801E-04	-2.664500E-03	S ** 1
9.094279E-03	-4.760000E-02	S ** 2
1.400310E-01	-4.232100E-01	S ** 3
3.260550E-01	-2.996000E+00	S ** 4
1.000000E+00	-1.174400E+01	S ** 5
0.000000E+00	-1.262000E+01	S ** 6

$$\frac{H^*_{22}(s)}{HN_H(s)} =$$

NENNER	ZAEHLER	
4.130270E-05	-5.671800E-04	S ** 0
8.260801E-04	-8.734100E-03	S ** 1
9.094279E-03	-1.552000E-01	S ** 2
1.400310E-01	-1.272400E+00	S ** 3
3.260550E-01	-9.685659E+00	S ** 4
1.000000E+00	-2.960500E+01	S ** 5
0.000000E+00	-4.522000E+01	S ** 6

Bei maximal 10 % Überschwingen ist für die Regelgröße 1 die Anregelzeit von $t_{AN1} = 50$ sec und für die Regelgröße 2 $t_{AN2} = 40$ sec gefordert. Damit ist sowohl für EV3 als auch für EV4 nach Gl.(3.4.7)

$$\underline{G}_V(s) = \underline{K}_W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{1}{225}}{\frac{1}{225} + 0.0933\ s + s^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100} + 0.14\ s + s^2} \end{bmatrix}$$

festgelegt.

Die Bedingung, daß $HN_H(s)$ nur Nullstellen in der linken s-Halbebene aufweist, erlaubt nun den Ansatz

$$\underline{G}_{\ddot{u}}(s) = \frac{1}{HN_H(s)}\ \underline{H}^*(s)\ \underline{K}_W(s),$$

wobei Gl.(3.4.13)

$$\partial[N_{Wi}(s)] - \partial[Z_{Wi}(s)] = 2 \geq \partial_i[\underline{H}^*(s)] - \partial[HN_H(s)] = 1$$

ebenfalls erfüllt ist. Die Methode der indirekten Kompensation mit der Struktur nach Bild 3.4.1 und den Ansätzen nach Kapitel 3.4.1

macht es möglich, das Störverhalten mit Hilfe der Gln.(3.4.15) und (3.4.16) unabhängig vom Führungsverhalten vorzugeben. Für [illegible]$_{ZE}(s)$ wird nach Gl.(3.4.17a)

$$\frac{Z_{\lambda 1}(s)}{N_{\lambda 1}(s)} = \frac{s}{s^2 + 1.4\ s + 1} = \frac{Z_{\lambda 2}(s)}{N_{\lambda 2}(s)}$$

gewählt. Die zur Berechnung von $\underline{G}_R(s)$ notwendige Matrix $\underline{K}^{-1}$ enthält, da

$$\partial_i[\underline{H}^*(s)] - \partial[HN_H(s)] = 1 \text{ für } i = 1,2$$

ist, die Koeffizienten der höchsten Potenzen von $\underline{H}^*_{ij}(s)$ und ist somit gegeben durch

$$\underline{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 23.66 & 43.1123 \\ -12.62 & -45.22 \end{bmatrix}.$$

Die Reglermatrix kann somit berechnet werden zu

$$\underline{G}_R(s) = \begin{bmatrix} G_{R11}(s) & G_{R12}(s) \\ G_{R21}(s) & G_{R22}(s) \end{bmatrix},$$

mit

$G_{R11}(s) =$

[illegible]	[illegible]	
0.000000E+00	9.771940E-06	S ** 0
4.1[illegible]27[illegible]E-05	[illegible].[illegible]7[illegible]E-[illegible]	S ** 1
8.203801E-04	4.905900E-03	S ** 2
9.094279E-03	5.554599E-02	S ** 3
1.4[illegible]31[illegible]E-01	[illegible].[illegible]519[illegible]E-[illegible]1	S ** [illegible]
[illegible]	[illegible].[illegible]71[illegible]E+[illegible]	S ** [illegible]
1.[illegible]E+[illegible]	2.11[illegible]E+[illegible]	S ** [illegible]

$G_{R12}(s) =$

[illegible]	[illegible]	
[illegible]E+00	1.7[illegible]E-[illegible]	S **
4.130270E-05	5.195300E-04	S ** 1
8.203801E-04	6.126199E-03	S ** 2
9.094279E-03	1.085300E-01	S ** 3
[illegible].4[illegible]31[illegible]E-01	[illegible].[illegible]371[illegible]E-[illegible]1	S ** 4
3.28[illegible]E-01	4.[illegible]E+[illegible]	S ** 5
1.000000E+00	2.200000E+00	S ** 6

$G_{R21}(s) =$

NENNER	ZAEHLER	
0.000000E+C0	-5.211600E-06	S ** 0
4.130270E-05	-2.783400E-05	S ** 1
8.203801E-04	-4.534100E-04	S ** 2
9.094279E-03	3.490600E-03	S ** 3
1.400310E-01	1.994000E-02	S ** 4
3.260550E-01	5.270000E-01	S ** 5
1.000000E+C0	5.863000E+00	S ** 6

$G_{R22}(s) =$

NENNER	ZAEHLER	
0.000000E+C0	-1.867500E-05	S ** 0
4.130270E-05	-6.521000E-05	S ** 1
8.203801E-04	-2.438600E-03	S ** 2
9.094279E-03	7.174360E-03	S ** 3
1.400310E-01	-1.726100E-01	S ** 4
3.260550E-01	8.380001E-01	S ** 5
1.000000E+C0	8.532301E+00	S ** 6

Die Ergebnisse von Simulationen mit dem System TS2 sind in den Bildern 3.5.9 bis 3.5.12 zu finden.

Der Reglerentwurf nach EV4 wird analog zu EV3 in Bezug auf $\underline{G}_V(s)$ und $\underline{G}_{\ddot{u}}(s)$ durchgeführt. Definiert wird nach Gl.(3.4.19)

$$\underline{G}(s)\,\underline{G}_R(s) = \underline{\lambda}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{s} \end{bmatrix}, \quad \lambda_1,\ \lambda_2 > 0.$$

Mit der eingeführten Näherung $\underline{G}(s) = \underline{H}(s)$ ist bei Wahl von $\underline{G}_K(s) = \underline{I}$

$$\underline{G}_R(s) = \frac{H^*(s)}{s\ HN_H(s)} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Bei der Reglereinstellung wurde nun so vorgegangen, daß durch Änderung von λ_1 und λ_2 während einer Simulation das Störverhalten beurteilt wurde. Das Führungsverhalten ist ja weitgehend durch $\underline{G}_V(s)$ und $\underline{G}_{\ddot{u}}(s)$ festgelegt. Das Entkopplungsverhalten wurde ebenfalls als Beurteilungskriterium herangezogen. Es zeigte sich, daß für $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$ ein gutes Entkopplungs- und Störverhalten (siehe Bild 3.5.13 und 3.5.14) erzielt werden kann.

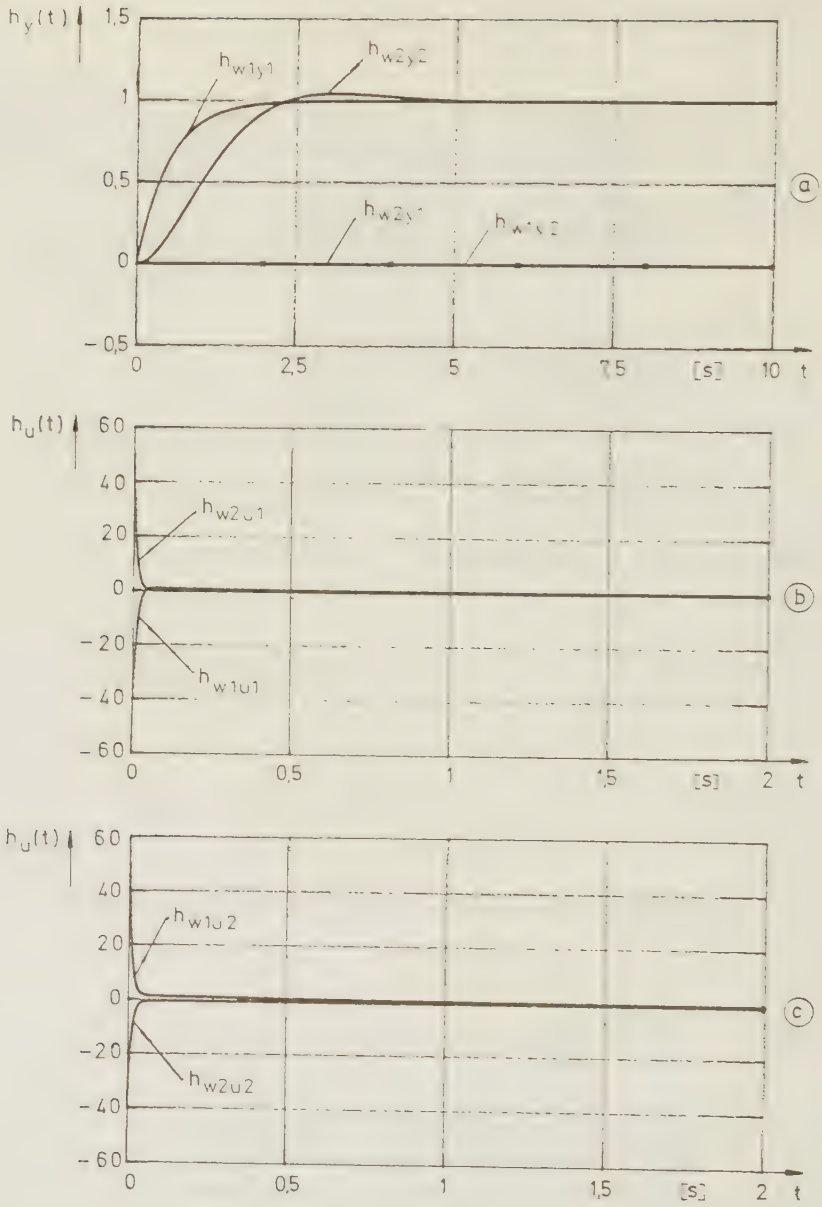


Bild 3.5.2. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS1 mit Entwurfsverfahren EV1:

(a) Regelgröße $h_{w1y1}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2y2}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$
$h_{w2y1}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$, $h_{w1y2}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$

(b) Stellgröße $h_{w1u1}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2u1}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$

(c) Stellgröße $h_{w1u2}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2u2}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$

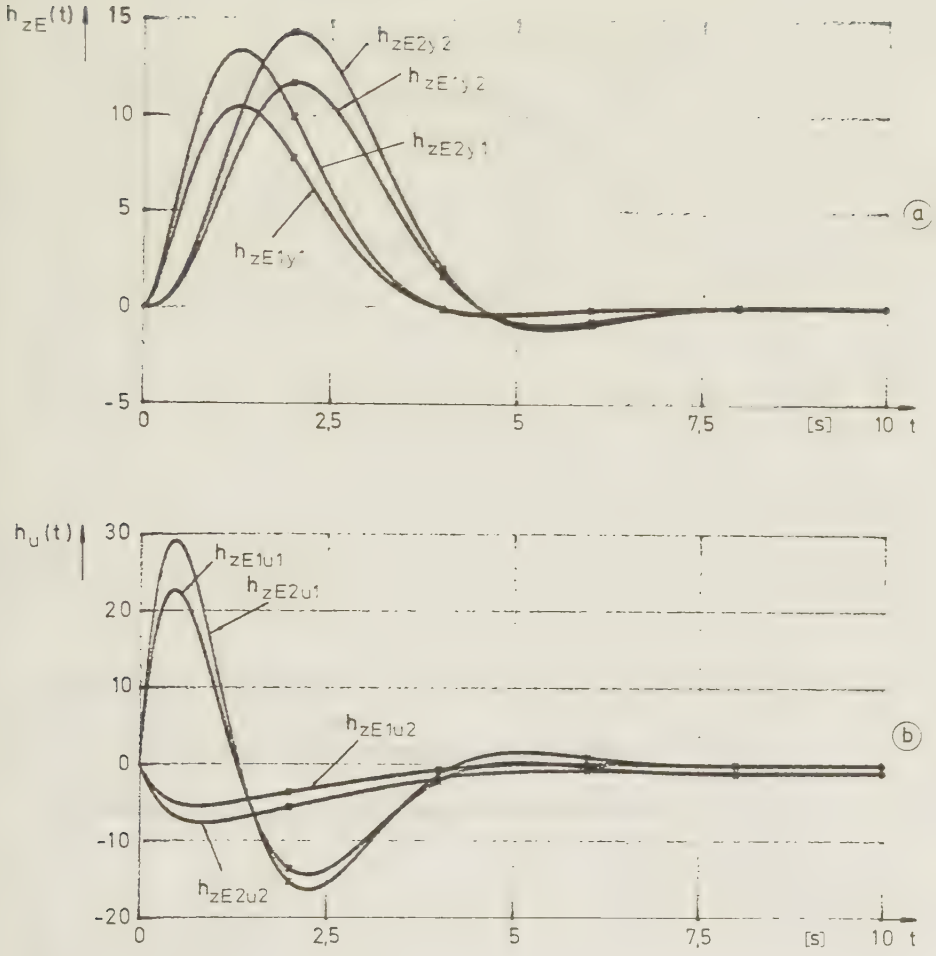


Bild 3.5.3. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS1 mit Entwurfsverfahren EV1:

(a) Regelgröße $h_{zE1y1}(z_{E1} = s(t),\ z_{E2} = 0)$, $h_{zE1y2}(z_{E1} = s(t),\ z_{E2} = 0)$
$h_{zE2y1}(z_{E1} = 0,\ z_{E2} = s(t))$, $h_{zE2y2}(z_{E1} = 0,\ z_{E2} = s(t))$

(b) Stellgröße $h_{zE1u1}(z_{E1} = s(t),\ z_{E2} = 0)$, $h_{zE1u2}(z_{E1} = s(t),\ z_{E2} = 0)$
$h_{zE2u1}(z_{E1} = 0,\ z_{E2} = s(t))$, $h_{zE2u2}(z_{E1} = 0,\ z_{E2} = s(t))$

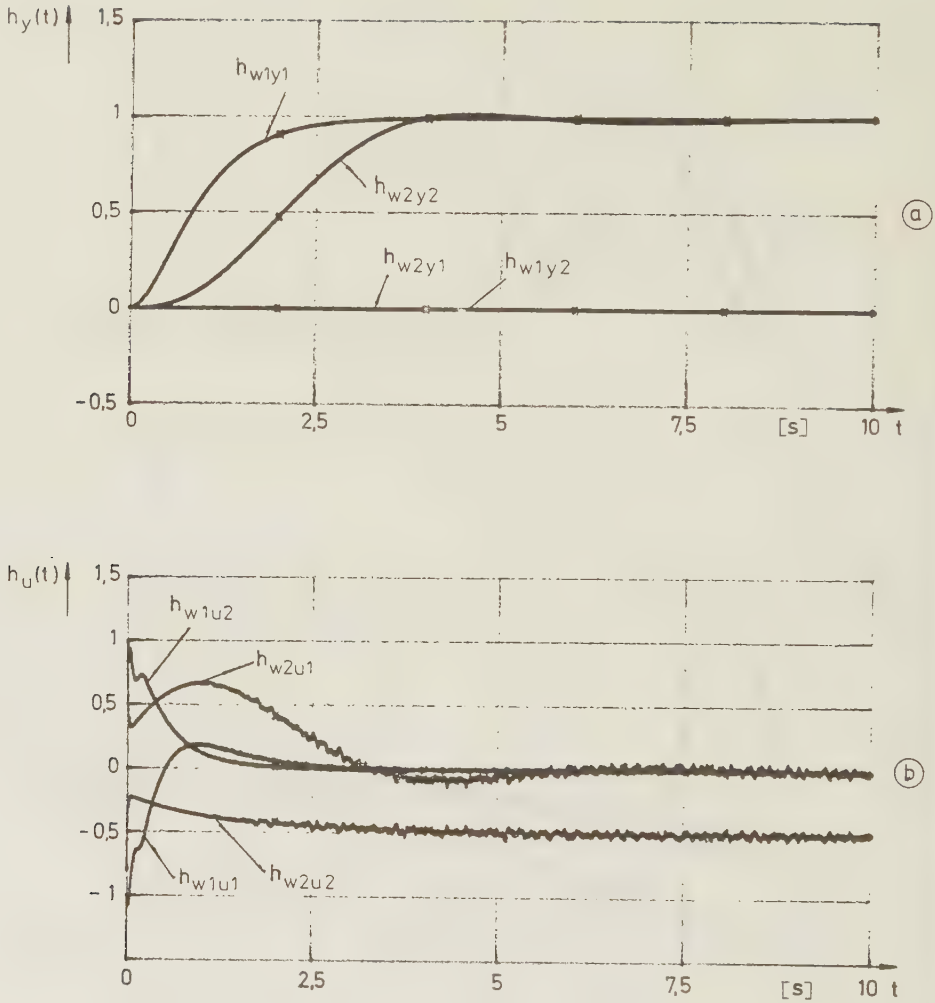


Bild 3.5.4. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS1 mit Entwurfsverfahren EV1:

(a) Regelgröße $h_{w1y1}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2y2}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$
$h_{w2y1}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$, $h_{w1y2}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$

(b) Stellgröße $h_{w1u1}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w1u2}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$
$h_{w2u1}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$, $h_{w2u2}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$

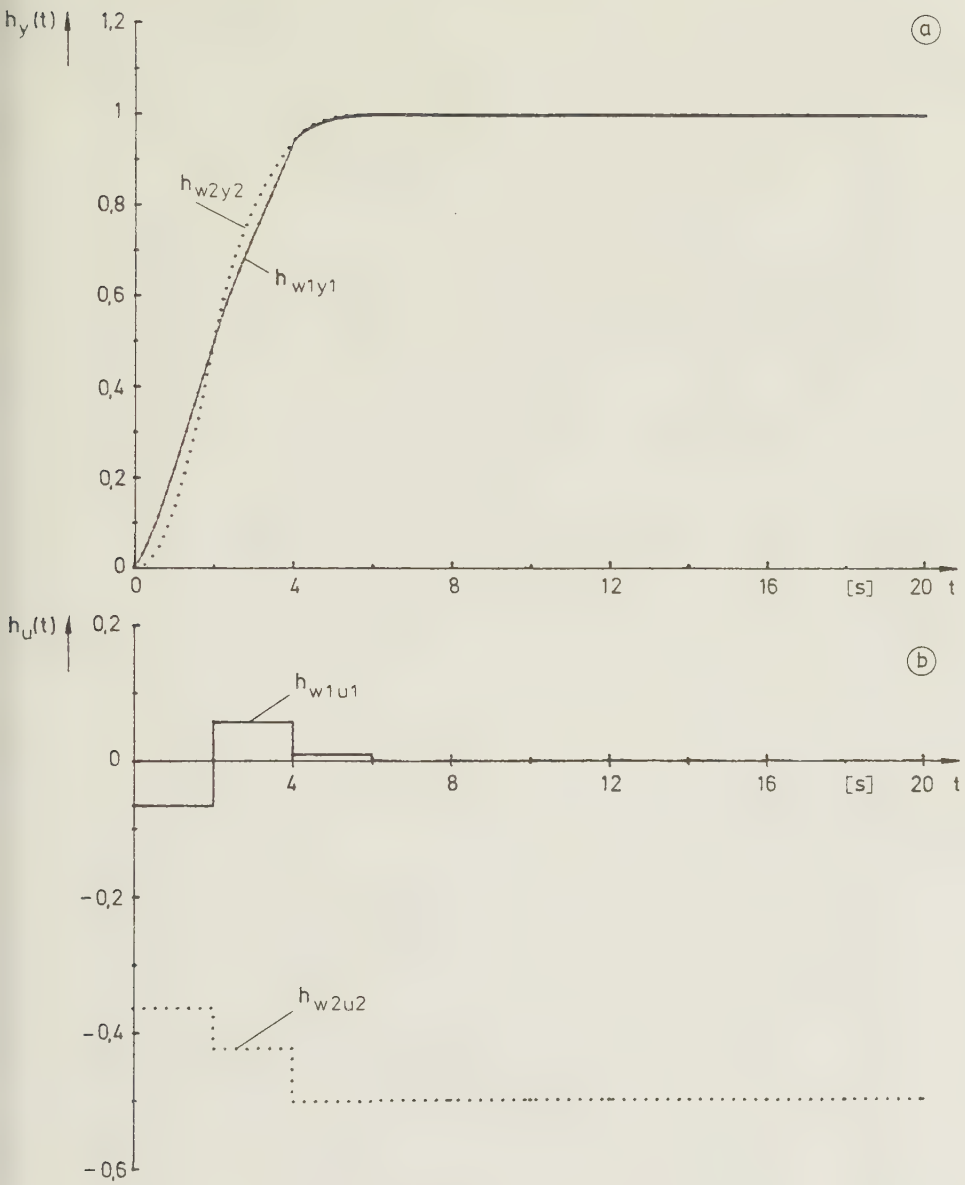


Bild 3.5.5. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS1 mit Entwurfsverfahren EV2:
(a) Regelgröße $h_{w1y1}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2y2}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$
(b) Stellgröße $h_{w1u1}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2u2}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$

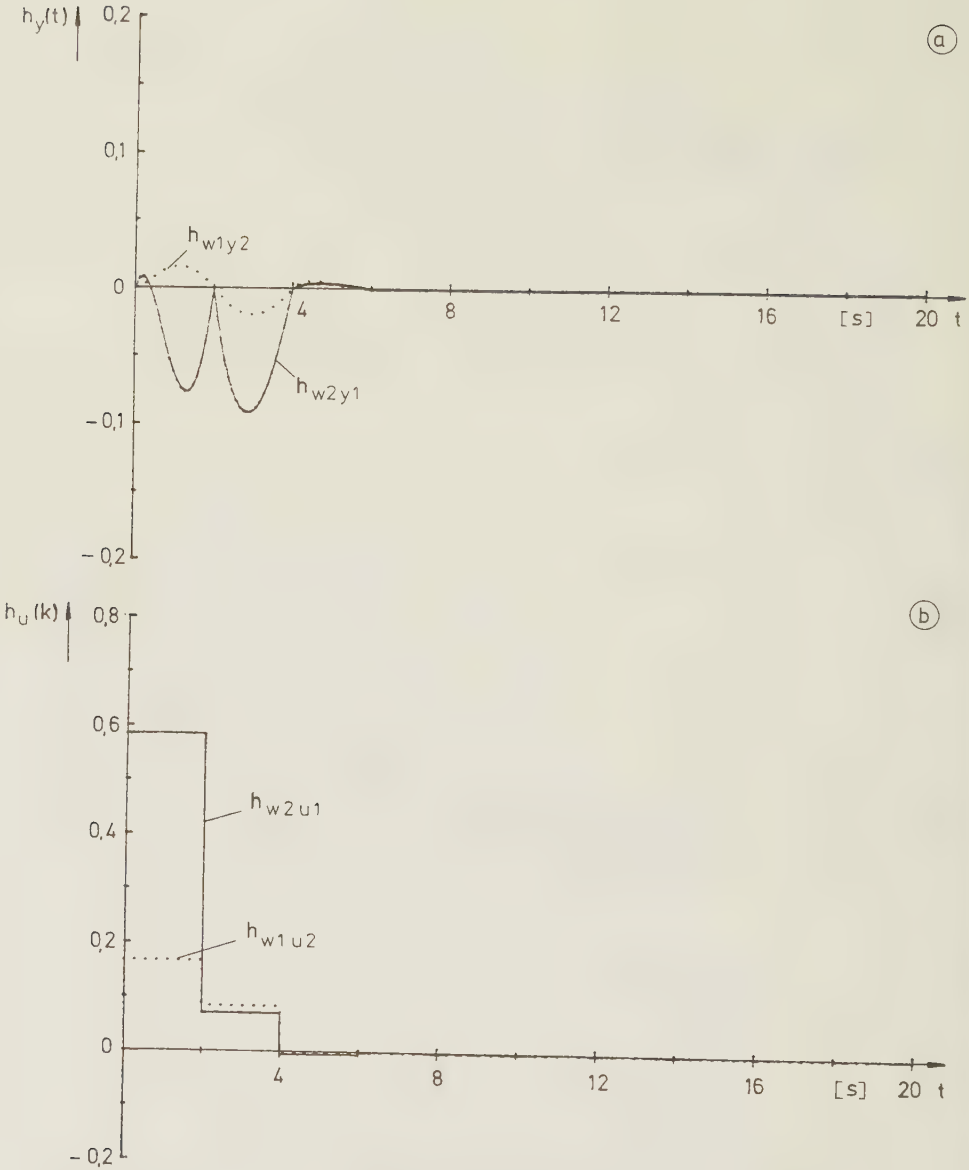


Bild 3.5.6. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS1 mit Entwurfsverfahren EV2:
(a) Regelgröße $h_{w1y2}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2y1}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$
(b) Stellgröße $h_{w1u2}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2u1}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$

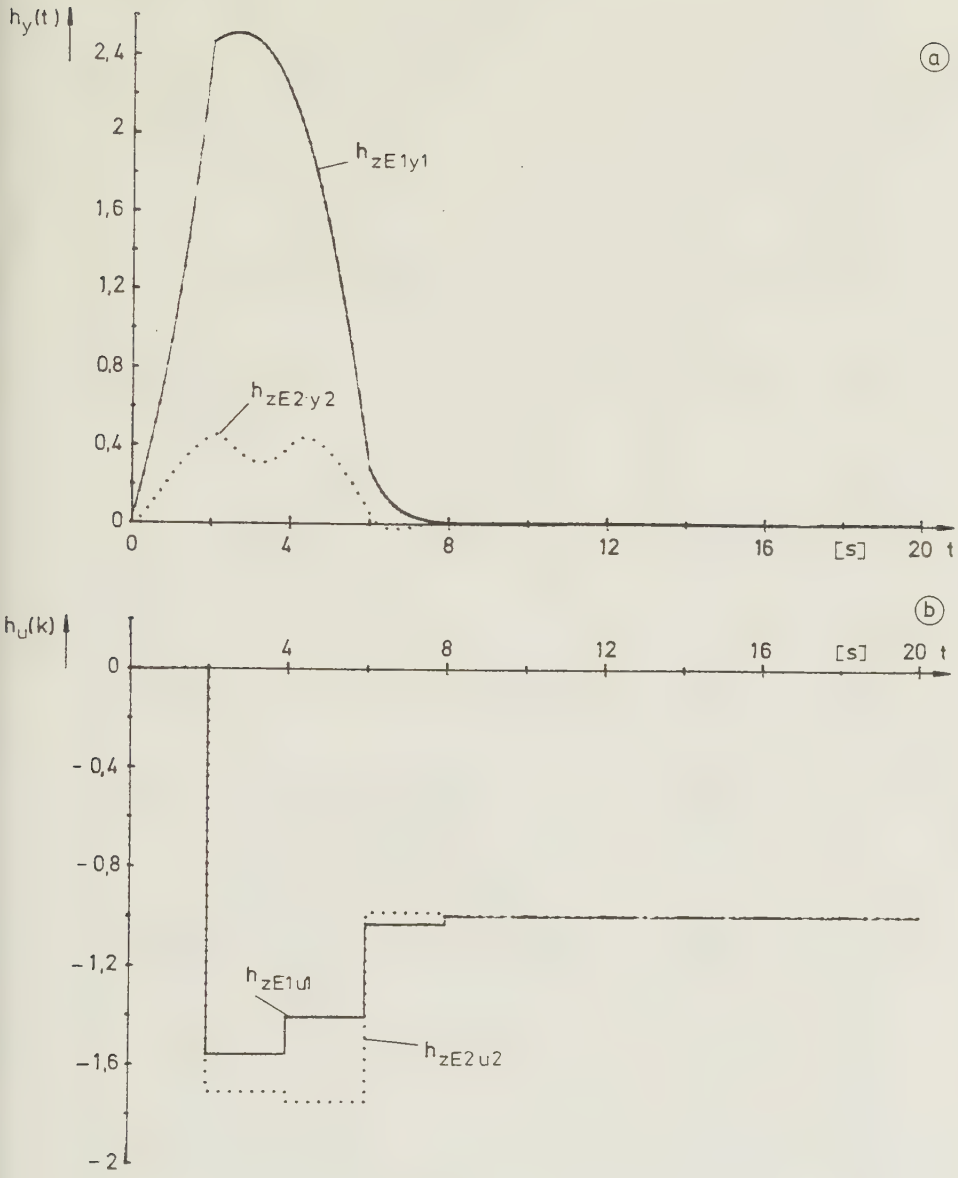


Bild 3.5.7. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS1 mit Entwurfsverfahren EV2:
(a) Regelgröße $h_{zE1y1}(z_{E1} = s(t),\ z_{E2} = 0)$, $h_{zE2y2}(z_{E1} = 0,\ z_{E2} = s(t))$
(b) Stellgröße $h_{zE1u1}(z_{E1} = s(t),\ z_{E2} = 0)$, $h_{zE2u2}(z_{E1} = 0,\ z_{E2} = s(t))$

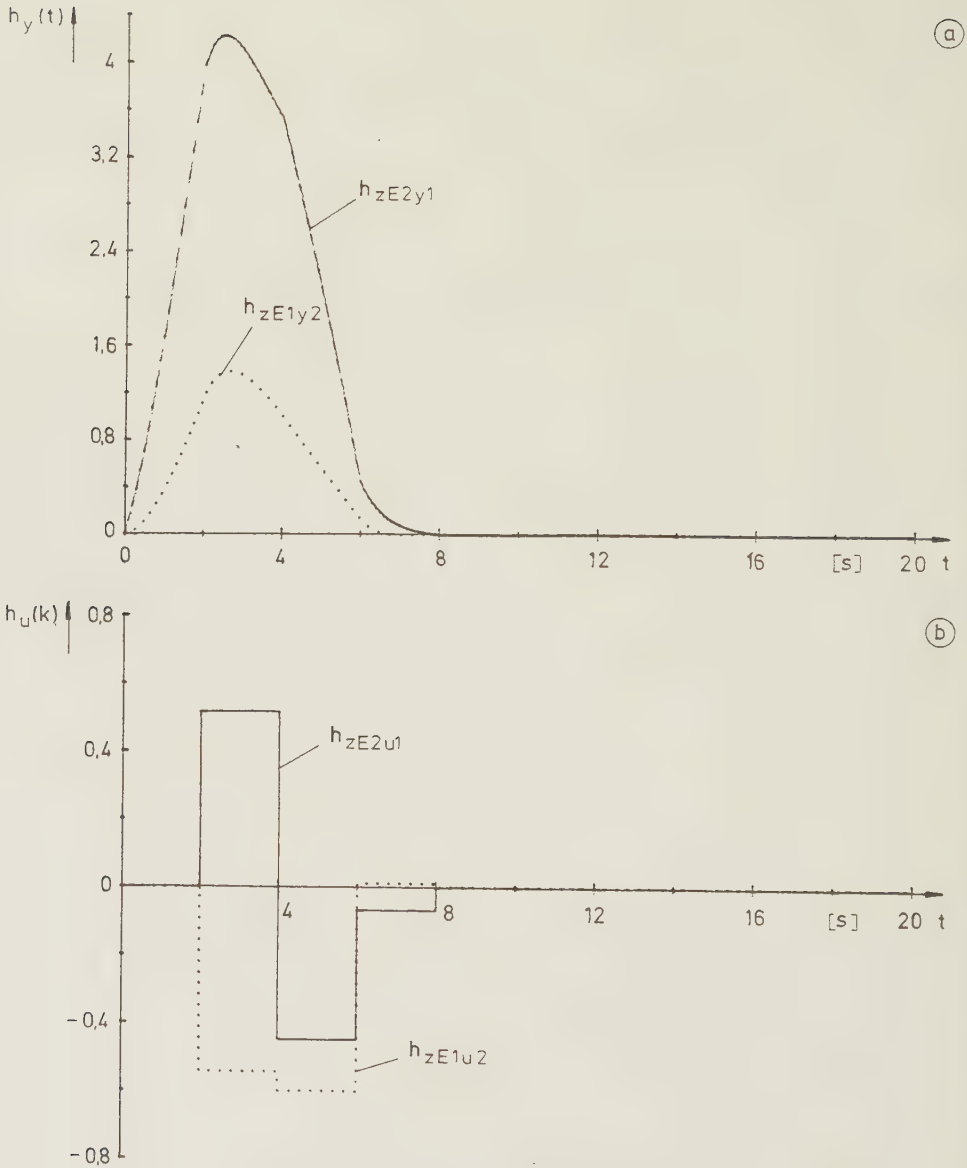


Bild 3.5.8. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS1 mit Entwurfsverfahren EV2:
(a) Regelgröße $h_{zE2y1}(z_{E1}=0,\ z_{E2}=s(t))$, $h_{zE1y2}(z_{E1}=s(t),\ z_{E2}=0$
(b) Stellgröße $h_{zE2u1}(z_{E1}=0,\ z_{E2}=s(t))$, $h_{zE1u2}(z_{E1}=s(t),\ z_{E2}=0$

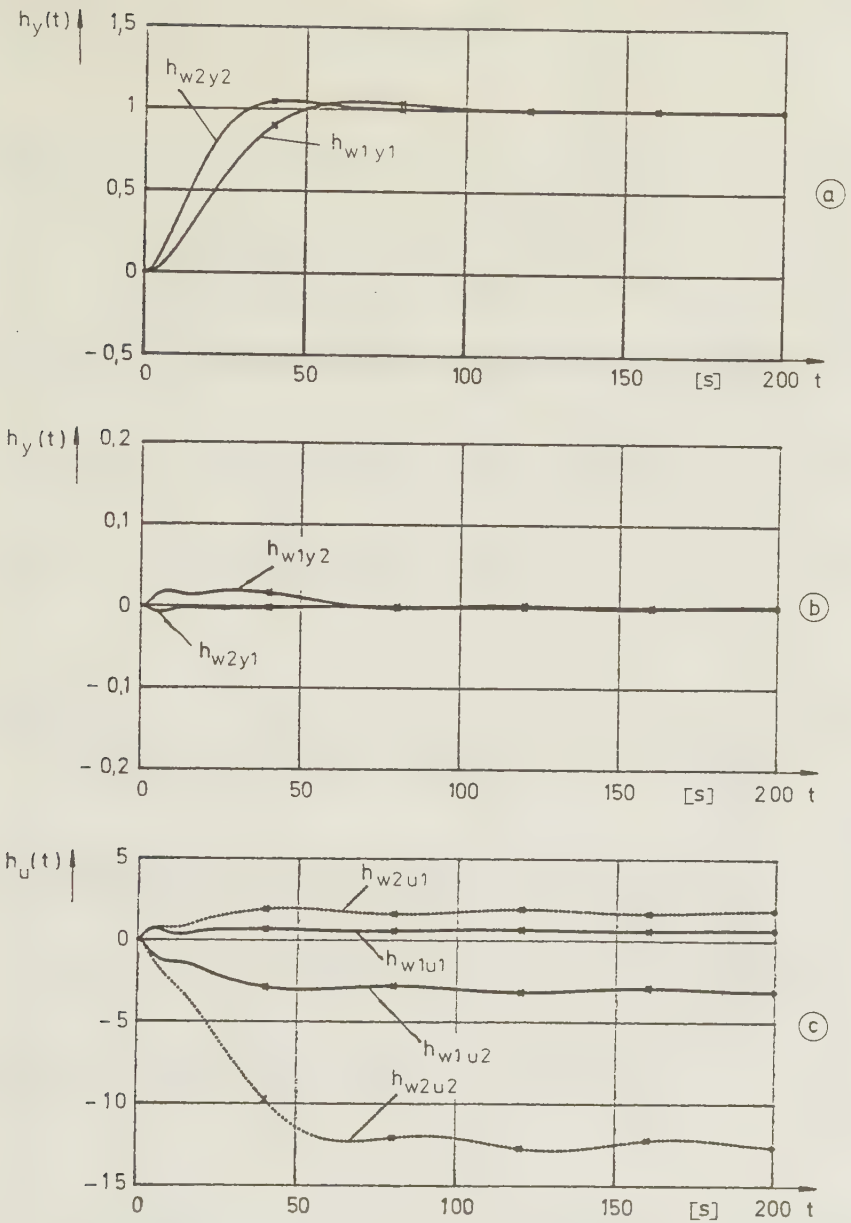


Bild 3.5.9. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS2 mit Entwurfsverfahren EV3:

(a) Regelgröße $h_{w1y1}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2y2}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$

(b) Regelgröße $h_{w2y1}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$, $h_{w1y2}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$

(c) Stellgröße $h_{w1u1}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w1u2}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$
$h_{w2u1}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$, $h_{w2u2}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$

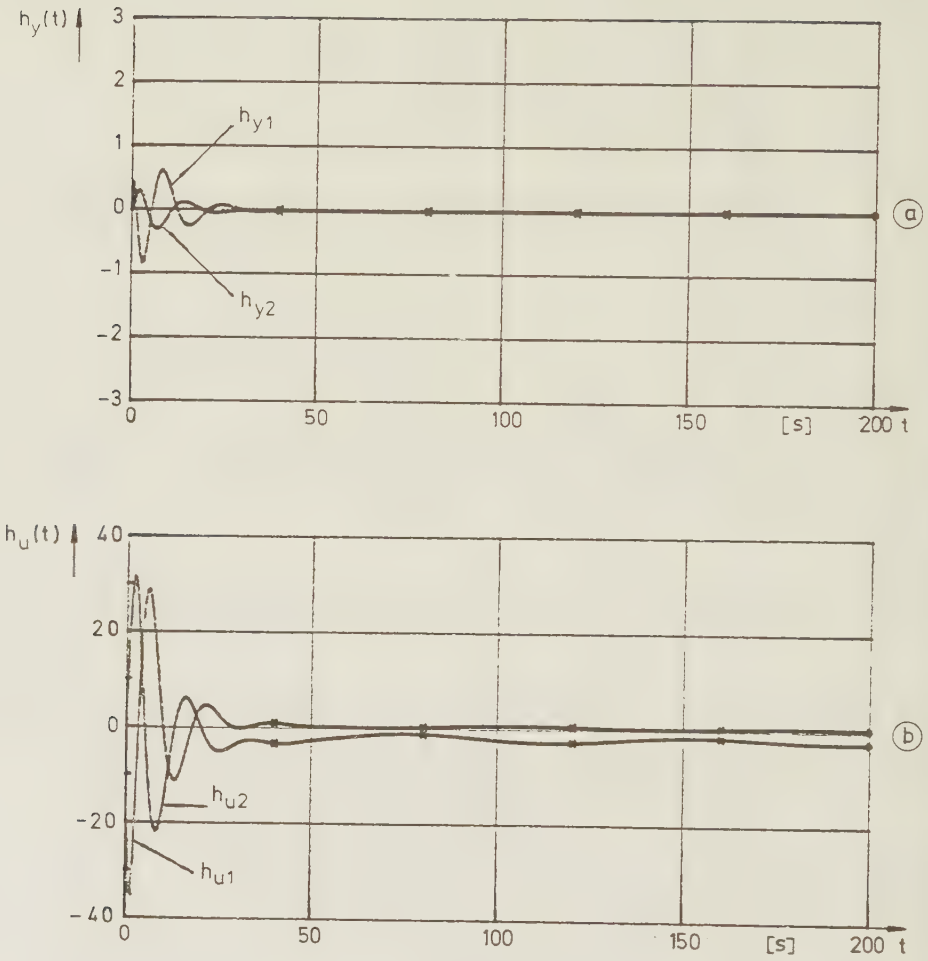


Bild 3.5.10. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS2 mit Entwurfsverfahren EV3:
(a) Regelgröße $h_{y1}(\dot{m}_{sp} = 2)$, $h_{y2}(\dot{m}_{sp} = 2)$
(b) Stellgröße $h_{u1}(\dot{m}_{sp} = 2)$, $h_{u2}(\dot{m}_{sp} = 2)$

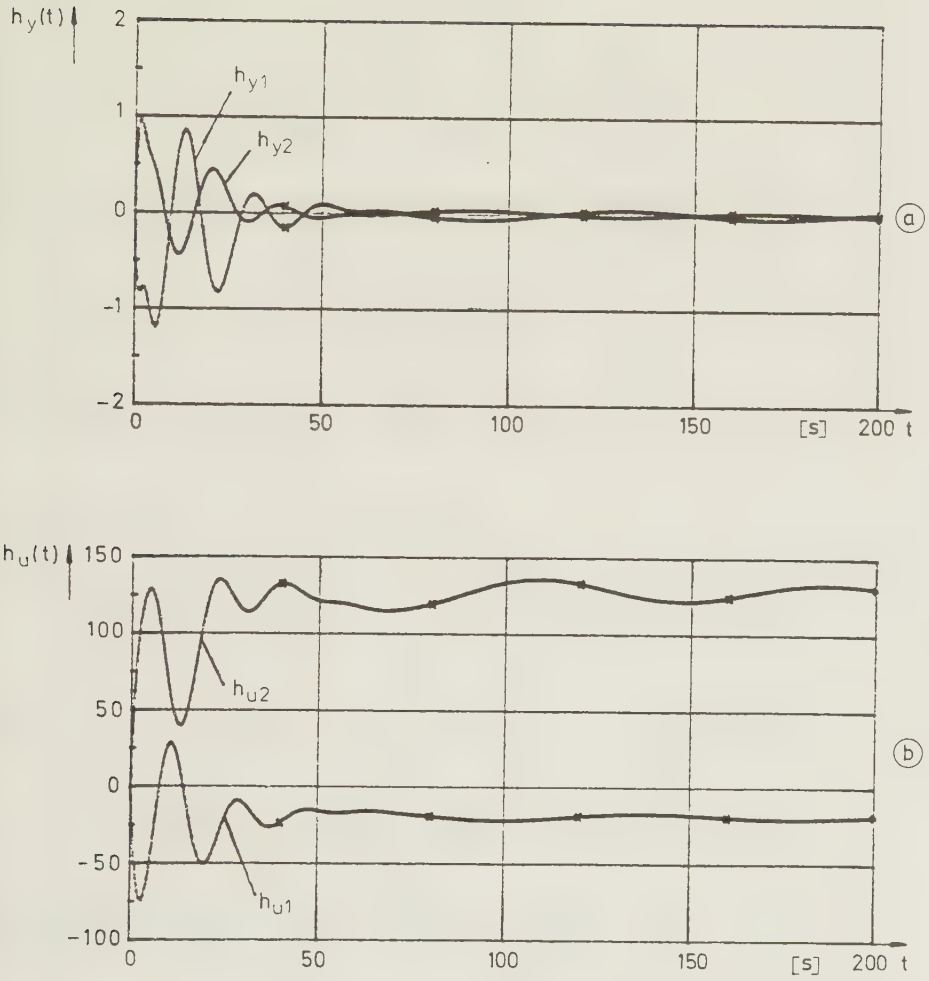


Bild 3.5.11. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS2 mit Entwurfsverfahren EV3:
(a) Regelgröße $h_{y1}(\vartheta_{sek} = 0.5)$, $h_{y2}(\vartheta_{sek} = 0.5)$
(b) Stellgröße $h_{u1}(\vartheta_{sek} = 0.5)$, $h_{u2}(\vartheta_{sek} = 0.5)$

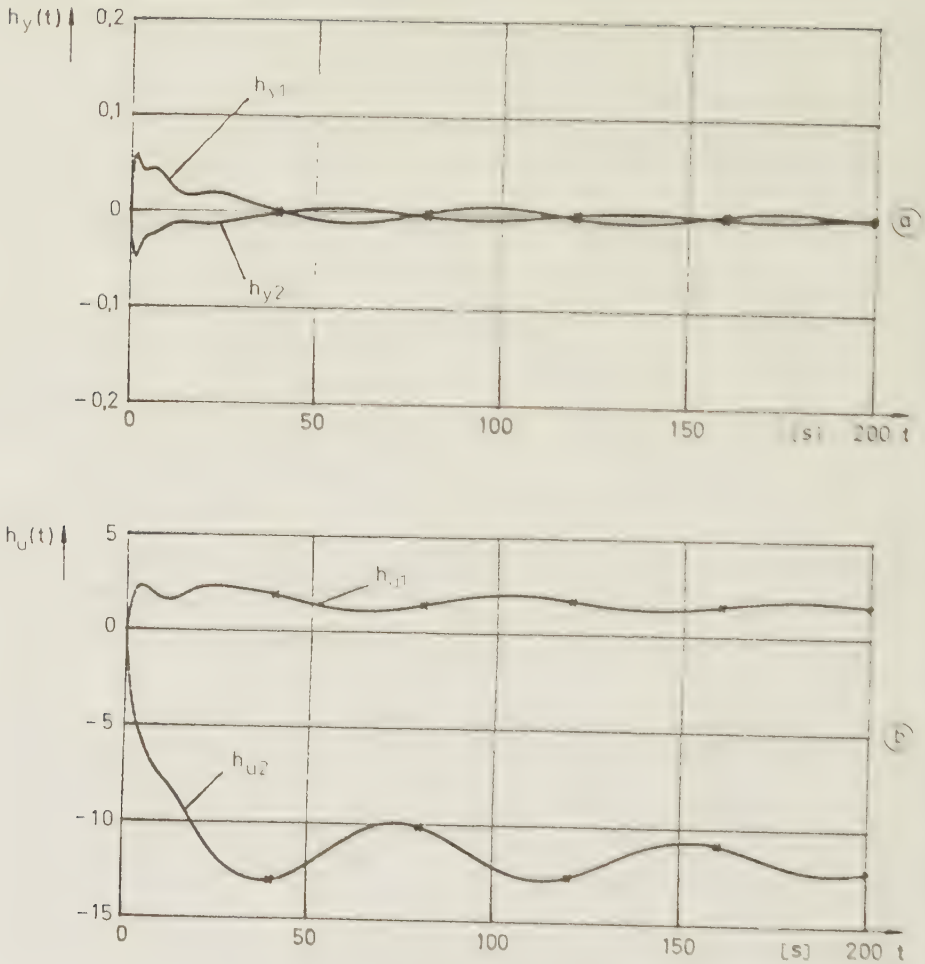


Bild 3.5.12. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS2 mit Entwurfsverfahren EV3:
(a) Regelgröße $h_{y1}(p_{FD} = 1)$, $h_{y2}(p_{FD} = 1)$
(b) Stellgröße $h_{u1}(p_{FD} = 1)$, $h_{u2}(p_{FD} = 1)$

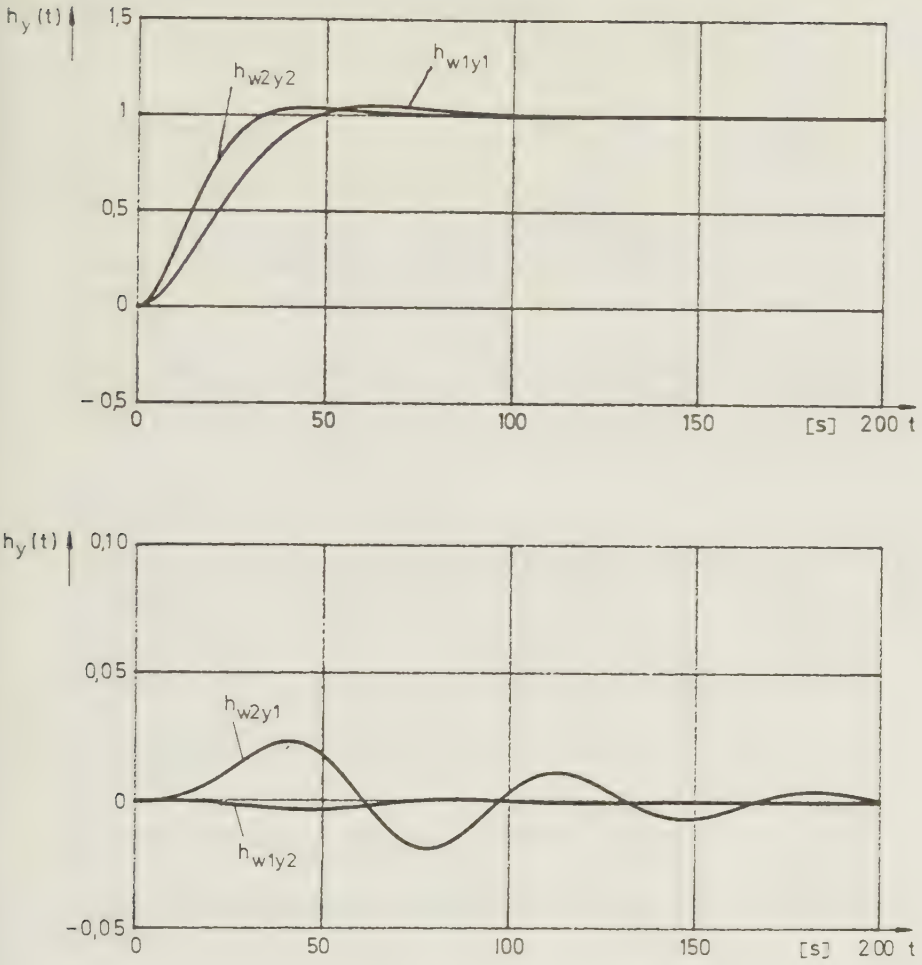
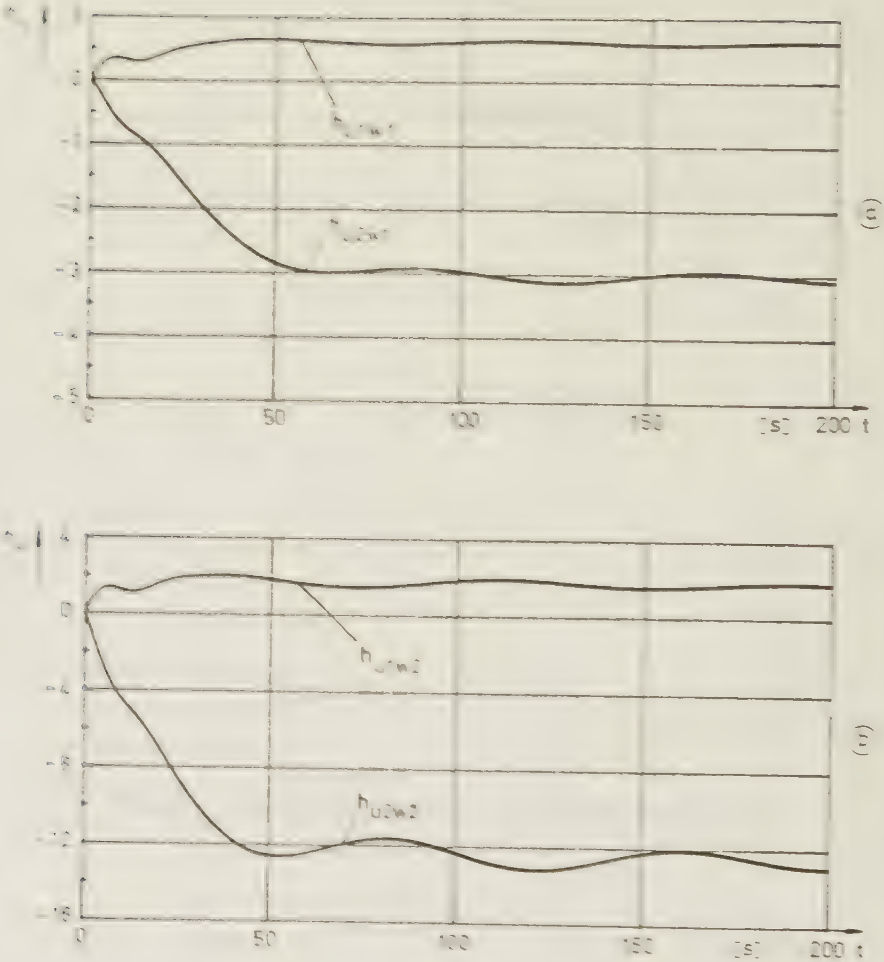


Bild 3.5.13. Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS2 mit Entwurfsverfahren EV4:
(a) Regelgröße $h_{w1y1}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$, $h_{w2y2}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$
(b) Regelgröße $h_{w2y1}(w_1 = 0,\ w_2 = s(t))$, $h_{w1y2}(w_1 = s(t),\ w_2 = 0)$



[illegible] Übergangsfunktionen bei Auslegung des Regelkreises für System TS2 [illegible]
[illegible]

4. Entwurf von Regelungen für Strecken mit grossen Unbestimmtheiten

4.1 Einführung

Die Anwendung der im folgenden vorgestellten Verfahren verlangt eine Klassifizierung der Begriffe "robuste" und "parameterunempfindliche" Regelung. Eine Deutung [1], die allgemein akzeptiert wird, grenzt die Begriffe wie folgt ab:

- Bei Vorgabe eines nominellen Verhaltens wird bei der parameterunempfindlichen Regelung angestrebt, daß kleine Parameteränderungen nur kleine Abweichungen vom gewünschten nominellen Verhalten bewirken. Unberücksichtigt bleibt das Verhalten bei großen Änderungen.

- Im Gegensatz dazu werden bei der robusten Regelung für kleine Änderungen sogenannte "lokale Empfindlichkeiten" zugelassen, wenn sich eine gewünschte Systemeigenschaft auch noch bei großen Parameteränderungen innerhalb vorgegebener Grenzen hält.

4.1.1 Anwendung algebraischer Entwurfsmethoden

Die wesentlichen Syntheseaufgaben robuster Auslegung von Regelkreisen bestehen darin,

- Auswirkungen von Parameteränderungen auf die Stabilität zu vermeiden,

- wichtige Forderungen an den Regelkreis bzw. an die Regelgrößen bei Parameteränderungen beizubehalten.

Wird eine Regelkreissynthese nach Kapitel 1.2 bzw. Kapitel 1.5 vorgenommen, so kann man für den Regelkreis mit Hilfe verschiedener Methoden die Nullstellen des charakteristischen Polynoms festlegen. Diese Nullstellen wird man in jedem Fall vorgeben,

so daß sich eine Stabilitätsprüfung des geschlossenen Kreises erübrigt. Ist die Regelstrecke linear und exakt bekannt, treten hier keine weiteren Probleme auf. Sind diese Bedingungen jedoch nicht gegeben, geht man also davon aus, daß sich die Parameter der Regelstrecke ändern können oder nicht genau bekannt sind, so wird die Auslegung des Regelkreises in Hinsicht auf Stabilität zum zentralen Problem. Es existieren bereits zahlreiche graphische und halbgraphische Verfahren, die sich die robuste Auslegung von Regelkreisen zur Aufgabe gestellt haben. Zu erwähnen ist hier insbesondere eine rechnergestützte Methode, die auf der Basis des Nichols-diagramms angewendet wird [10].

Im folgenden Beitrag soll durch Anwendung algebraischer Methoden versucht werden, eine Lösung des Syntheseproblems zu finden.

Ausgangspunkt ist die parametrische Beschreibung des Regelkreises in Form der Gl.(1.5.11). Im allgemeinen sind für die Regelstrecke die sogenannten nominellen Betriebspunkte bekannt. Sie stellen zumeist ausgezeichnete Punkte dar, z. B. den Nennpunkt, und sind im folgenden durch den Index N gekennzeichnet. Ebenso existieren sicherlich Bedingungen für die Wahl des charakteristischen Polynoms in diesem Nominalpunkt, hier durch $\underline{p}_N$ gekennzeichnet. Würde man nun den Regler mit Hilfe dieses Nominalparametersatzes entwerfen, so muß man Gl.(1.5.11) in

$$\underline{M}_N \cdot \underline{r}_N = \underline{p}_N - \underline{m}_N \tag{4.1.1}$$

umschreiben. Die Reglerparameter sind gegeben durch

$$\underline{r}_N = \underline{M}_N^{-1} (\underline{p}_N - \underline{m}_N) . \tag{4.1.2}$$

C(s) und D(s) werden hier als teilerfremd vorausgesetzt, so daß $\underline{M}_N$ nichtsingulär ist. Stellt sich jedoch ein Betriebspunkt mit $\underline{M} \neq \underline{M}_N$ und $\underline{m} \neq \underline{m}_N$ ein, und wird der Regler nicht verändert, so ergeben sich neue Nullstellen, wobei das charakteristische Polynom

durch P(s) und dessen neue Koeffizienten durch $\underline{p}$ gegeben sind. Diese Koeffizienten und damit die Nullstellen lassen sich, bei entsprechendem rechnerunterstützten Vorgehen, leicht mit Gl. (4.1.1) in der Form

$$\underline{p} = \underline{M} \cdot \underline{M}_N^{-1} \left[\underline{p}_N - \underline{m}_N\right] + \underline{m} \qquad (4.1.3)$$

berechnen. Aus diesen Überlegungen lassen sich zu Anfang die folgenden Bedingungen formulieren:

1. P(s) darf nur Nullstellen in der linken s-Halbebene enthalten.
2. Die Nullstellen von P(s), d. h. die Eigendynamik des geregelten Kreises, müssen Toleranzbedingungen erfüllen.

Die genannten Bedingungen werden in diesem und in Abschnitt 4.2 unterschiedlich formuliert. Hier wird so vorgegangen, daß alle Nullstellen innerhalb eines offenen Gebietes links von einer Grenzkurve in der linken s-Halbebene liegen sollen. Sind die beiden Bedingungen 1 und 2 mit dem vorgegebenen Vektor $\underline{p}_N$ nicht zu erfüllen, so ist $\underline{p}_N$ zu modifizieren und hiermit wiederum Gl.(4.1.3) zu prüfen.

Für die weiteren Überlegungen wird folgende Voraussetzung getroffen. Die Struktur der Regelstrecke

$$G(s) = \frac{d_o + d_1 s + \ldots + d_m s^m}{c_o + c_1 s + \ldots + s^n}, \quad \text{mit } n > m$$

d. h. Zähler- und Nennergrad der Übertragungsfunktion G(s) werden als bekannt vorausgesetzt bzw. es wird angenommen, daß diese Grössen selbst invariant sind. Die Koeffizienten der Übertragungsfunktion sind in ihrem Wertebereich gegeben durch

$$d_{imin} \leq d_i \leq d_{imax} \quad \text{für } i = 0, \ldots, m$$

und

$$c_{imin} \leq c_i \leq c_{imax} \text{ für } i = 0, \ldots, n-1, \tag{4.1.4}$$

wobei die Nominalwerte in diesem Wertebereich enthalten sind. Aus den charakteristischen Werten an den Bereichsgrenzen wird nun gebildet $\underline{M}_{min}$, $\underline{m}_{min}$ und $\underline{M}_{max}$, $\underline{m}_{max}$. Hiermit können bestimmte Wertepaare $\underline{M}_1$, $\underline{m}_1$ und $\underline{M}_2$, $\underline{m}_2$ zur simultanen Auslegung des Regelkreises herangezogen werden. Würde man nun den Regler mit $\underline{M}$, $\underline{m}$ aus diesem Wertebereich bei vorgegebenem Vektor $\underline{p}$ berechnen, so folgt aus Gl. (1.5.11)

$$\underline{r} = \underline{M}^{-1}(\underline{p}-\underline{m}). \tag{4.1.5}$$

M wird hier wiederum als invertierbar vorausgesetzt. An den in Gl. (4.1.4) definierten Grenzen folgt hieraus

$$\underline{M}_{max} \cdot \underline{r} = \underline{p}_{max} - \underline{m}_{max}$$

und

$$\underline{M}_{min} \cdot \underline{r} = \underline{p}_{min} - \underline{m}_{min}. \tag{4.1.6}$$

Eliminiert man $\underline{r}$, so läßt sich schreiben

$$\underline{p}_{max} = \underline{M}_{max}\, \underline{M}_{min}^{-1}(\underline{p}_{min} - \underline{m}_{min}) + \underline{m}_{max} \tag{4.1.7}$$

oder

$$\underline{p}_{min} = \underline{M}_{min}\, \underline{M}_{max}^{-1}(\underline{p}_{max} - \underline{m}_{max}) + \underline{m}_{min}. \tag{4.1.8}$$

Das bedeutet, daß das charakteristische Polynom $P_{min}(s)$ bzw. $P_{max}(s)$ von der Wahl von $P_{max}(s)$ bzw. $P_{min}(s)$ abhängig ist. Hier soll nun, wie in Gl.(4.1.1) beschrieben, der in der Praxis weit häufigere Fall betrachtet werden, daß ein nomineller Betriebspunkt existiert, der durch $\underline{M}_N$ und $\underline{m}_N$ beschrieben wird. Jeder andere Parametersatz $\underline{M}_i$, $\underline{m}_i$ aus dem Bereich nach Gl.(4.1.4) erfüllt nun die Gleichung

$$\underline{M}_i \cdot \underline{r}_N = \underline{p}_i - \underline{m}_i. \tag{4.1.9}$$

Daraus ergibt sich das Polynom $P_i(s)$ mit den Parametern

$$\underline{p}_i = \underline{M}_i \, \underline{M}_N^{-1} (\underline{p}_N - \underline{m}_N) + \underline{m}_i \,. \tag{4.1.10}$$

Aufgabe einer Reglersynthese ist es nun, den Regelkreis so auszulegen, daß er möglichst unempfindlich gegenüber Parameterschwankungen der Regelstrecke sein soll. Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß durch Wahl von $\underline{p}_N$ in Gl.(4.1.10) $\underline{p}_i$ ermittelt wird und anhand der Nullstellen von $P_i(s)$ über die Güte der Regelung entschieden wird. Dieser Lösungsansatz geht also davon aus, $\underline{p}_N$ innerhalb eines offenen oder geschlossenen Stabilitätsgebietes der s- oder z-Ebene zu wählen und im ersten Schritt analog zu Gl. (4.1.10) in Vektoren $\underline{p}_i$ umzurechnen. Im zweiten Schritt können dann mit Gl.(4.1.2) die entsprechenden Reglerparameter berechnet werden. Für i = 1,..., r, also r simultan anzulegende Betriebspunkte, entsteht dann auch für die relevanten Reglerparameter ein abgegrenzter Parameterraum, aus dem die entsprechenden Reglerparameter ausgewählt werden können. Im Bild 4.1.1 sind die Entwurfsschritte für n = 2 vereinfacht dargestellt.

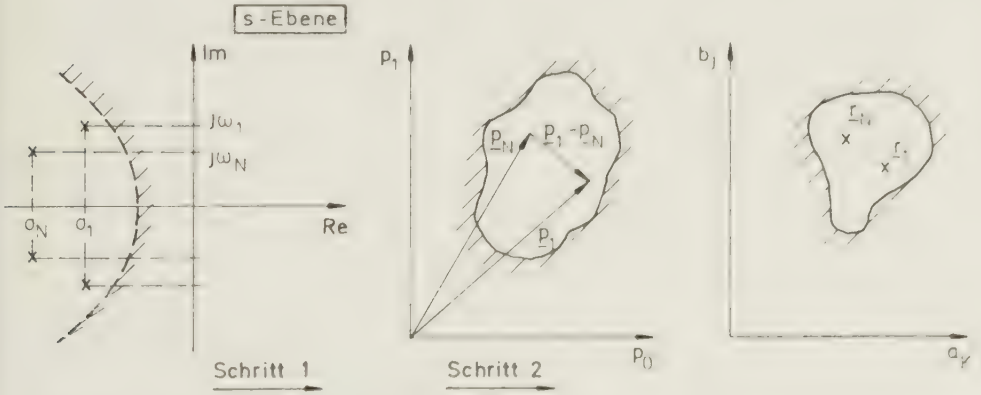


Bild 4.1.1. Entwurfsschritte für die Reglersynthese

Im ersten Entwurfsschritt ist laut Gl.(4.1.10) die Abweichung

$$\Delta \underline{p}_1 = \underline{p}_1 - \underline{p}_N = \underline{M}_1 \, \underline{M}_N^{-1} (\underline{p}_N - \underline{m}_N) + \underline{m}_1 - \underline{p}_N \tag{4.1.11}$$

zu minimieren. Das bedeutet für $\Delta \underline{p}_1 \to 0$, daß sich das dynamische Verhalten des Regelkreises im Betriebspunkt $\underline{p}_1$ nur wenig vom ge-

wählten Nennpunkt $\underline{p}_N$ unterscheidet. Äquivalent zur Forderung $\Delta\underline{p}_1 \stackrel{!}{=} \min$ ist die Aussage, daß das Gütefunktional

$$I = \Delta\underline{p}_1^T \, \Delta\underline{p}_1 \tag{4.1.12}$$

minimal werden soll. Wie man leicht sieht, hat Gl.(4.1.11) für $\Delta\underline{p}_1 = 0$ die triviale Lösung

$$\underline{p}_N = (\underline{M}_1 \, \underline{M}_N^{-1} - \underline{I})^{-1} \, (\underline{M}_1 \, \underline{M}_N^{-1} \, \underline{m}_N - \underline{m}_1). \tag{4.1.13}$$

Durch den Ansatz nach Gl.(4.1.12) ist keine Bewertung des sich ergebenden charakteristischen Polynoms und damit von $\underline{p}_N$ möglich. Will man z. B. Stellgrößenvorgabe und die Lage der Pol- und Nullstellen des Reglers beeinflussen, so wird das Gütefunktional in folgender Form erweitert

$$\underline{I} = \Delta\underline{p}_1^T \, \underline{B} \, \Delta\underline{p}_1 + \underline{\varepsilon}^T \, \underline{p}_N. \tag{4.1.14}$$

Mit Hilfe des zweiten Summanden werden die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms selbst bewertet. Wird in Gl.(4.1.11) substituiert

$$\underline{H}_1 = \underline{M}_1 \, \underline{M}_N^{-1} - \underline{I} \tag{4.1.15}$$

und

$$\underline{A}_1 = \underline{m}_1 - \underline{M}_1 \, \underline{M}_N^{-1} \, \underline{m}_N, \tag{4.1.16}$$

so folgt aus

$$\frac{\partial I}{\partial \underline{p}_N} = [\underline{H}_1^T (\underline{B} + \underline{B}^T) \, \underline{H}_1] \, \underline{p}_N + \underline{H}_1^T (\underline{B} + \underline{B}^T) \, \underline{A}_1 + \underline{\varepsilon} = 0 \tag{4.1.17}$$

$$\underline{p}_N = -[\underline{H}_1^T (\underline{B} + \underline{B}^T) \, \underline{H}_1]^{-1} \, (\underline{\varepsilon} + \underline{H}_1^T (\underline{B} + \underline{B}^T) \, \underline{A}_1). \tag{4.1.18}$$

Bisher wurde davon ausgegangen, daß der Regler, der durch den Parametervektor $\underline{p}_N$ gekennzeichnet ist, festgelegt wird durch die

Wahl der Parameter in $\underline{p}_N$ und durch den nominellen Betriebspunkt der Strecke, die durch $\underline{M}_N$ und $\underline{m}_N$ beschrieben wird. Der Wertebereich der Streckenkoeffizienten, der durch Gl.(4.1.4) gegeben ist, legt nun nahe, nicht nur - wie bereits beschrieben - einen Betriebspunkt zu betrachten, z. B. den mit dem Index 1, sondern auch noch einen weiteren. Dies liegt darin begründet, daß mit Gl.(4.1.4) der Wertebereich innerhalb zweier Grenzen festgelegt ist, wobei die Indizes 1 und 2 Betriebspunkte aus diesem Bereich oder auch min und max bedeuten können. Gl.(4.1.14) wird in folgender Weise erweitert:

$$I = \Delta\underline{p}_1^T \, \underline{B}_1 \, \Delta\underline{p}_1 + \Delta\underline{p}_2^T \, \underline{B}_2 \, \Delta\underline{p}_2 + \underline{\varepsilon}^T \, \underline{p}_N . \tag{4.1.19}$$

Aus den Gln.(4.1.14) und (4.1.17) läßt sich hierfür folgender Lösungsweg ableiten:

$$\frac{\partial I}{\partial \underline{p}_N} = \sum_{\nu=1}^{2} (\underline{\alpha}_\nu \, \underline{p}_N + \underline{\beta}_\nu) + \underline{\varepsilon} = 0 \tag{4.1.20}$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}_\nu &= \underline{H}_\nu^T (\underline{B}_\nu + \underline{B}_\nu^T) \, \underline{H}_\nu , \\ \underline{\beta}_\nu &= \underline{H}_\nu^T (\underline{B}_\nu + \underline{B}_\nu^T) \, \underline{A}_\nu , \\ \underline{H}_\nu &= \underline{M}_\nu \, \underline{M}_N^{-1} - \underline{I} \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

und

$$\underline{A}_\nu = \underline{m}_\nu - \underline{M}_\nu \, \underline{M}_N^{-1} \, \underline{m}_N .$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung

$$\underline{p}_N = - \left[\sum_{\nu=1}^{2} \underline{\alpha}_\nu \right]^{-1} \left(\sum_{\nu=1}^{2} \underline{\beta}_\nu + \underline{\varepsilon} \right) . \tag{4.1.22}$$

Die Auswertung der Gln.(4.1.19) bis (4.1.22) einschließlich der Überprüfung der Pollage und anschließender Simulation ist nur rech-

nergestützt durchführbar. Bei dem in '39] realisierten Programm wird die Auswertung des Gleichungssystems nach dem in Bild 4.1.2 dargestellten Ablaufschema durchgeführt.

Hier sei schon darauf hingewiesen, daß insbesondere eine Kombination mit dem im nächsten Kapitel vorgeschlagenen Entwurfsverfahren möglich und sinnvoll ist. Das verbindende Element liegt nämlich darin, daß $\underline{p}$ nach analytischer Vorgabe des Pollagenbereiches direkt in den entsprechenden Raum der Reglerparameter transformiert wird, was bei dem bisher vorgestellten Verfahren mit der Reglerstruktur nach Gl.(1.5.11) durchgeführt wird.

Um die Anwendung des bisher vorgestellten Verfahrens zu veranschaulichen, soll ein einfaches, aber keineswegs triviales Beispiel obige Ausführungen ergänzen. Gegeben sei die Übertragungsfunktion der Regelstrecke

$$G(s) = \frac{k}{1 + sT} = \frac{d_o}{c_o + s} = \frac{D(s)}{C(s)}$$

mit $d_o = \frac{k}{T}$ und $c_o = \frac{1}{T}$. Für die Streckenparameter k und T sind die Parameterbereiche festgelegt durch

$$k_{min} = 1 \leq k \leq 10 = k_{max}$$

$$T_{min} = 0.1 \leq T \leq 2 = T_{max},$$

wobei der nominelle Betriebspunkt durch $k_N = 4$ und $T_N = 2$ gegeben ist. Definiert werden nun zwei Betriebspunkte, für die gilt

$$\begin{bmatrix} d_{omin} \\ c_{omin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{min} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{T_{max}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

und

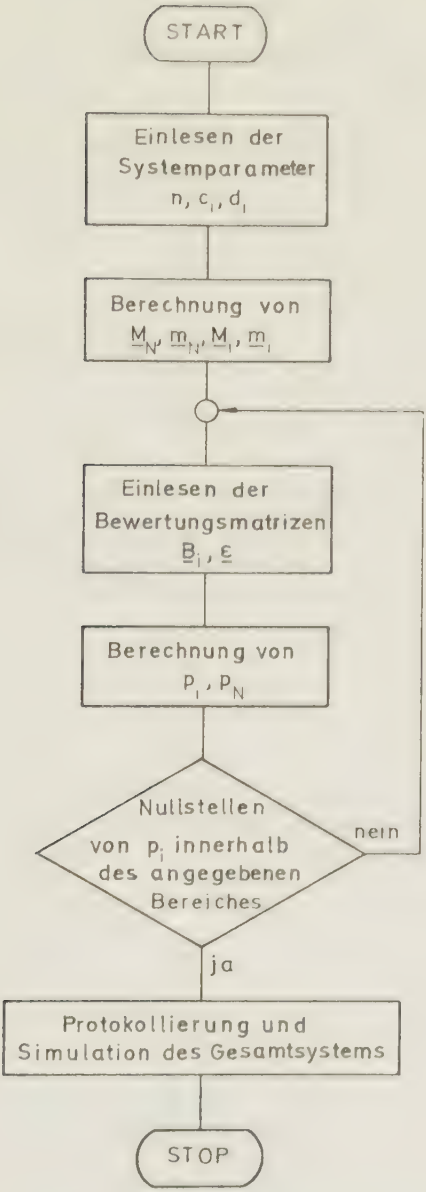


Bild 4.1.2. Ablaufschema zur Berechnung von p_N

$$\begin{bmatrix} d_{omax} \\ c_{omax} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{max} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{T_{min}} = \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Der nominelle Betriebspunkt errechnet sich zu

$$\begin{bmatrix} d_{oN} \\ c_{oN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_N \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{T_N} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Die Auswertung der Gl.(1.5.8) ergibt einen PI-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_o + b_1 s}{s}.$$

Analog zu Gl.(1.5.11) läßt sich das auszuwertende Gleichungssystem in der Form

$$\begin{bmatrix} d_o & 0 \\ 0 & d_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_o \\ p_1 \end{bmatrix}$$

beschreiben. Zur Abschätzung des Wertebereichs der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms an der Grenze $\underline{M}_{max}$, $\underline{m}_{max}$ bezogen auf die Grenze $\underline{M}_{min}$, $\underline{m}_{min}$ wird Gl.(4.1.7) ausgewertet. Hierfür ergibt sich

$$\underline{p}_{max} = \frac{d_{omax}}{d_{omin}} \begin{bmatrix} p_{omin} \\ p_{1min} - c_{omin} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_{omax} \end{bmatrix}$$

$$= 200 \begin{bmatrix} p_{omin} \\ p_{1min} - 0.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{omax} \\ p_{1max} \end{bmatrix}.$$

Analog hierzu errechnen sich die Vektoren $\underline{p}_{min}$ und $\underline{p}_{max}$ bezogen auf $\underline{p}_N$ zu

$$\underline{p}_{min} = 0.25 \begin{bmatrix} p_{oN} \\ p_{1N} + 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{omin} \\ p_{1min} \end{bmatrix}$$

und

$$\underline{p}_{max} = 50 \begin{bmatrix} p_{oN} \\ p_{1N} - 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{omax} \\ p_{1max} \end{bmatrix}.$$

Im ersten Schritt besteht mit dem Ansatz $P_N(s) = \omega_o^2 + 2d\omega_o s + s^2$ für $n = 1$ oder im allgemeinen Fall $P_N(s) = (\omega_o^2 + 2d\omega_o s + s^2)(s+\alpha)^{2n-2}$ die Möglichkeit, bei Festlegung der Grenzen für ω_o und d $P_{min}(s)$ und $P_{max}(s)$ auszuwerten und die Lage der Wurzeln für diese, durch den Ansatz $P_N(s)$ sich ergebenden charakteristischen Polynome zu beurteilen. Nach der Auswertung des Gleichungssystems (4.1.21) mit dem Ansatz

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{11}^1 & 0 \\ 0 & B_{22}^1 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{11}^2 & 0 \\ 0 & B_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

folgt aus Gl.(4.1.22)

$$\underline{p}_N = - \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon_1}{1.125\ B_{11}^1 + 4802\ B_{11}^2} \\ \dfrac{-0.5625\ B_{22}^1 - 1470\ B_{22}^2 + \varepsilon_2}{1.125\ B_{22}^1 + 4802\ B_{22}^2} \end{bmatrix}$$

Die Indizes 1 und 2 wurden für Gl.(4.1.19) hier so gewählt, daß 1 für den Vektor $\begin{bmatrix} d_{omin} \\ c_{omin} \end{bmatrix}$ und 2 für den Vektor $\begin{bmatrix} d_{omax} \\ c_{omax} \end{bmatrix}$ steht.

Für das betrachtete Beispiel wurden nun die Bewertungsmatrizen so gewählt, daß die Ergebnisse an den Punkten "max" und "min" gleich bewertet werden. Für $\underline{B}_1$ und $\underline{B}_2$ wurde gewählt $\underline{B}_1 = \underline{B}_2 = \underline{I}$. Im gesamten Parametervariationsbereich wird nun verlangt, daß die Wurzeln der sich ergebenden charakteristischen Polynome links des Bereiches $\sigma = -0.7$ liegen sollen, was einerseits sicherstellt, daß für bestimmte Parameterkombinationen ein zu langsames, d. h. kriechendes Einschwingen vermieden werden soll und andererseits eine Anregelzeit von $t_{an} \approx 2$ möglich ist. Mit Hilfe des im Bild 4.1.2 dargestellten Ablaufschemas wird

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40000 \\ \\ -20000 \end{bmatrix}$$

gewählt. Mit diesen Zahlenwerten lassen sich die Ergebnisse wie folgt zusammenstellen:

$$\underline{p}_N = \begin{bmatrix} p_{oN} \\ \\ p_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.32791 \\ \\ 4.47012 \end{bmatrix} \text{ mit den Wurzeln } s_{1/2N} = -2.23 \pm j\,1.83\,.$$

$$\underline{p}_{min} = \begin{bmatrix} p_{omin} \\ \\ p_{1min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.08198 \\ \\ 1.49253 \end{bmatrix}, \; s_{1/2min} = -0.75 \pm j\,1.23$$

und

$$\underline{p}_{max} \begin{bmatrix} p_{omax} \\ \\ p_{1max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 416.396 \\ \\ 208.506 \end{bmatrix} \text{ mit } s_{1max} = -2.02, \; s_{2max} = -206.5\,.$$

Die Reglerparameter werden mit Hilfe von Gl.(4.1.2) bestimmt und sind demnach

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.16396 \\ 1.98506 \end{bmatrix} .$$

Für dieses Beispiel wurde das Vorfilter entsprechend dem "Reglerentwurf für Störungs- und Führungsverhalten" aus Kapitel 1.3, Gl. (1.3.1), mit $G_{SZ}(s) = 1$ entworfen. Demnach ist

$$G_V(s) = \frac{K_W(s)}{G_R(s)\ K_Z(s)} \qquad (4.1.23)$$

mit dem gewünschten Führungsverhalten im Nennpunkt

$$K_W(s) = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{p_{oN}}{P_N(s)} = \frac{p_{oN}}{p_{oN} + p_{1N}s + s^2}$$

und dem Störverhalten für Störungen am Eingang der Regelstrecke

$$K_Z(s) = \frac{A(s)\ D(s)}{P_N(s)} .$$

In Gl.(4.1.23) eingesetzt ergibt dies

$$G_V(s) = \frac{\alpha(s)}{B(s)\ D(s)} = \frac{p_{oN}}{(b_o + b_1 s)\ d_{oN}} = \frac{1}{1 + \frac{b_1\ d_{oN}}{p_{oN}}\ s} = \frac{1}{1 + 0.477\ s} .$$

In den folgenden Bildern 4.1.3 bis 4.1.6 sind jeweils für die Werte $k = 1,2,4$ und 10 und $T = 0.1$, 0.5, 1 und 2 die Übergangsfunktionen der Regelgröße und Stellgröße $h_y(t)$ und $h_u(t)$ für sprungförmige Führungsgrößen $w(t) = s(t)$ dargestellt. Zusätzlich hierzu sind für $k = k_N = 4$ und $T = 0.1$, 0.5, 1 und 2 in den Bildern 4.1.7 und 4.1.8 die Übergangsfunktionen für sprungförmige Störungen am Eingang ($z_E(t) = s(t)$) und am Ausgang ($z_A(t) = s(t)$) der Regelstrecke dargestellt. Wie schon in den theoretischen Überlegungen vorweggenommen, zeigt auch die Simulation, daß in Hinsicht auf Überschwingen und Stellgrößenverlauf der Betriebspunkt $\begin{bmatrix} d_{omin} \\ c_{omin} \end{bmatrix}$ besonderer Beachtung

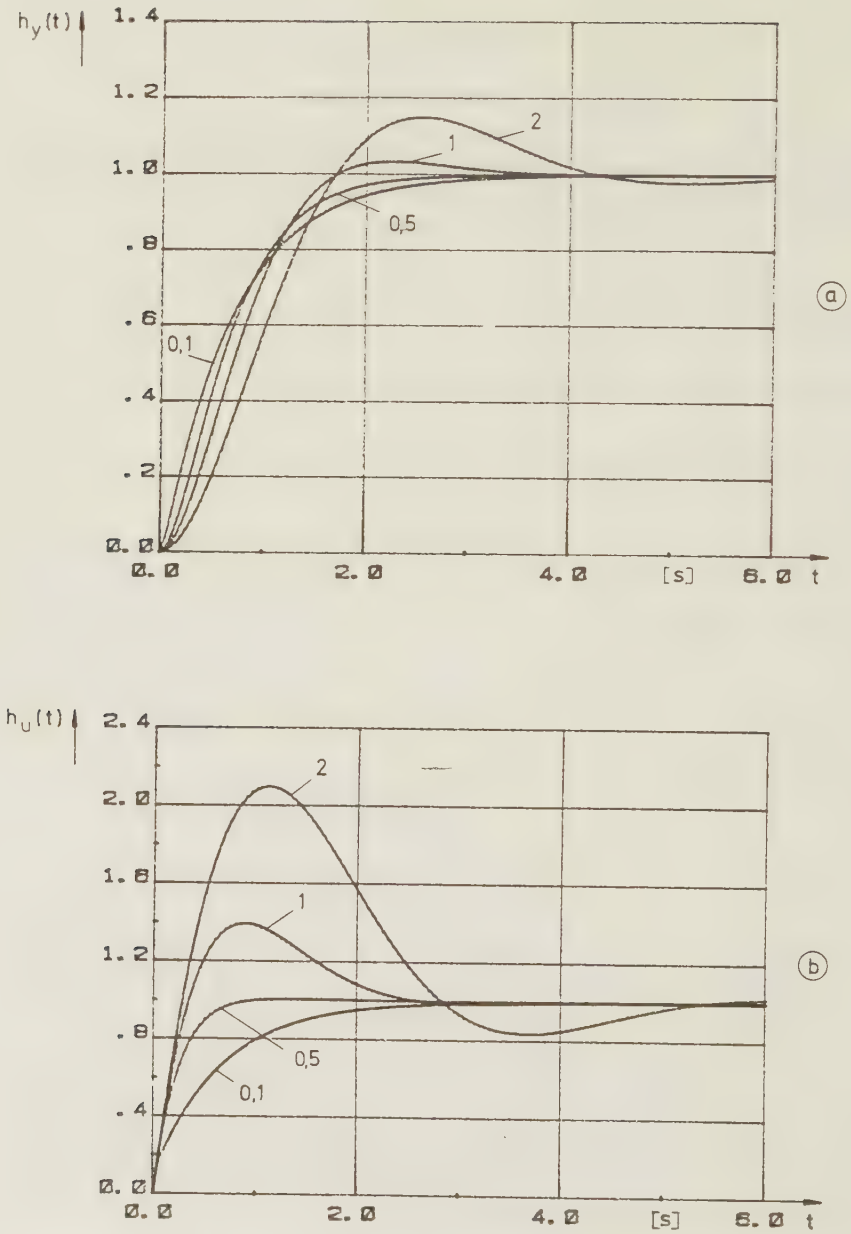
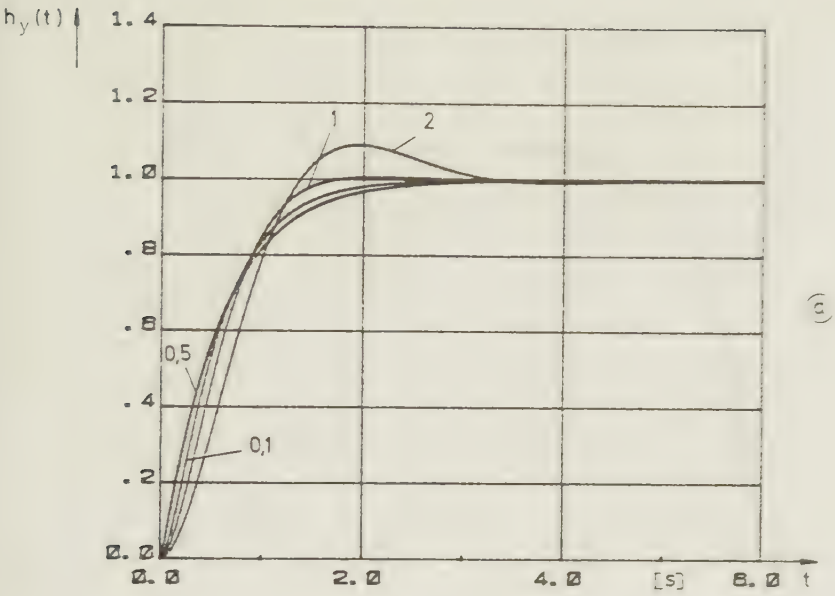


Bild 4.1.3. Übergangsfunktionen der Regelgröße $h_y(t)$ (a) und der Stellgröße $h_u(t)$ (b) für $w(t) = s(t)$, $k = 1$ und $T = 0.1$, 0.5, 1, 2



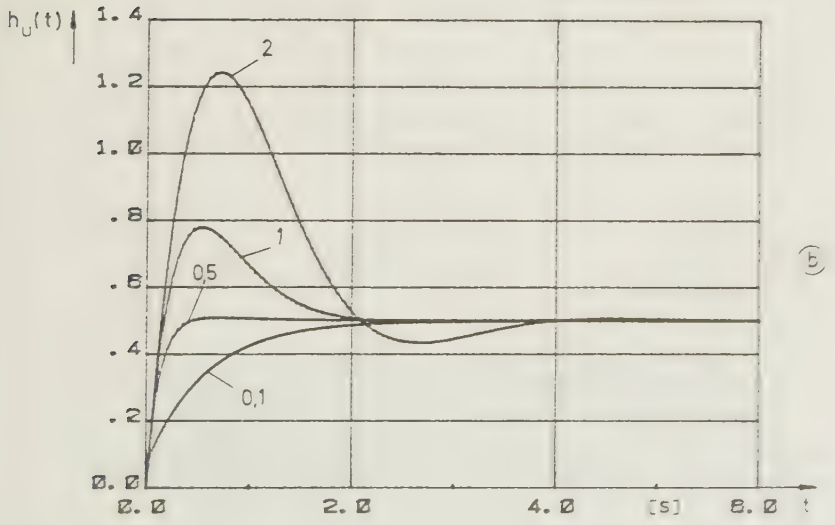
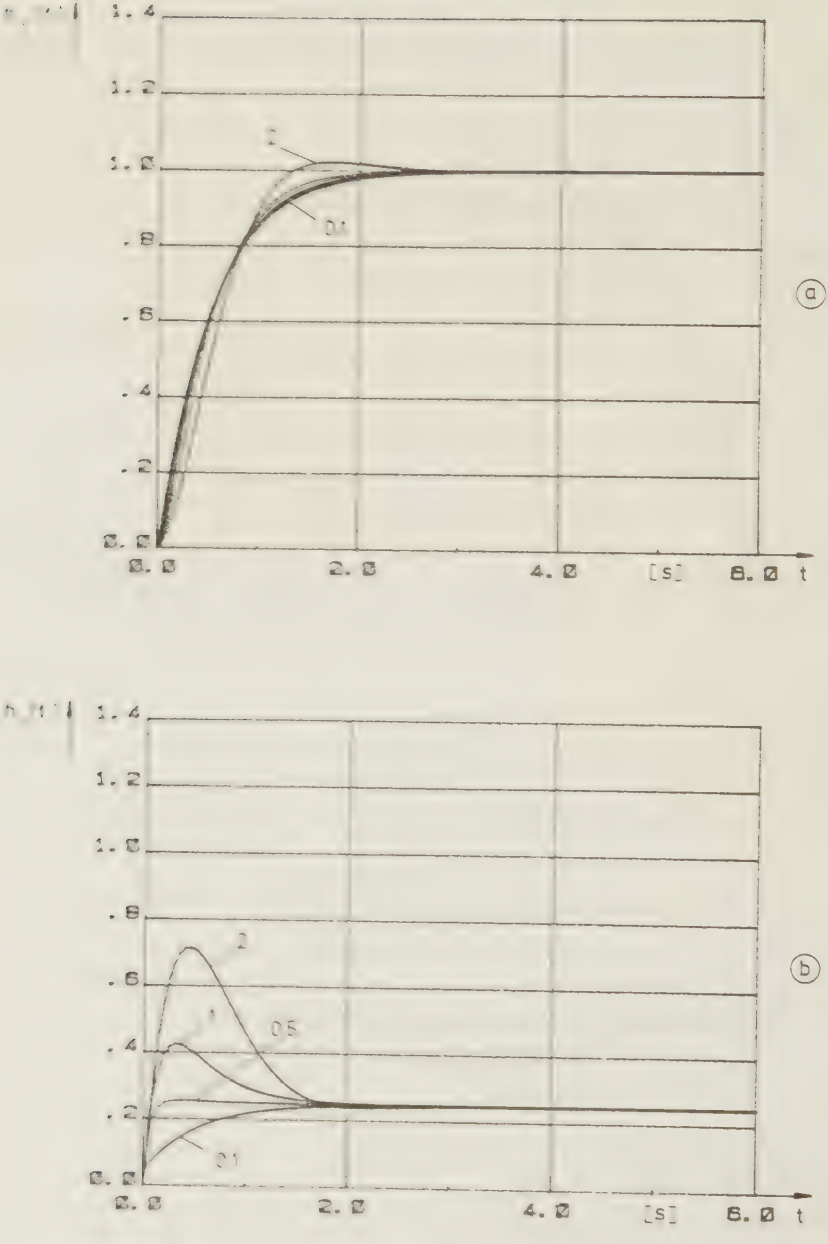
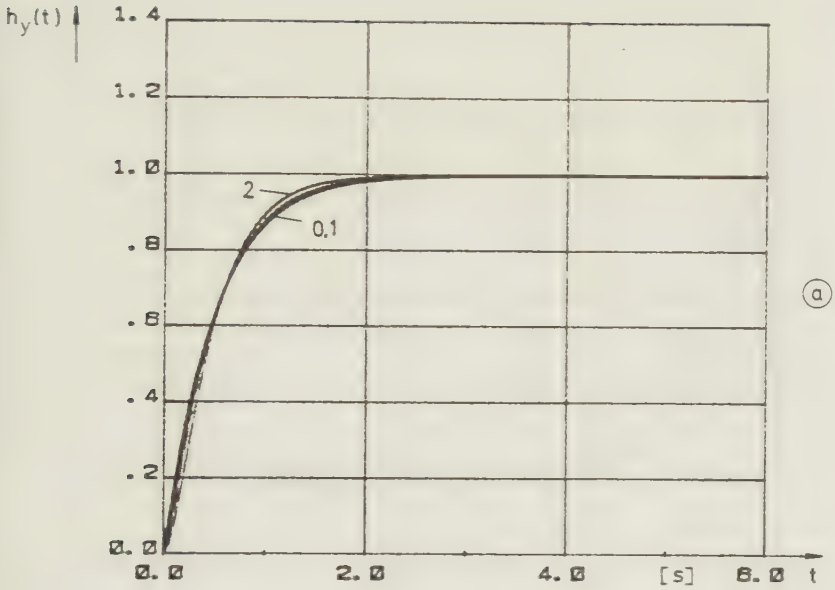


Bild 4.1.4. Übergangsfunktionen der Regelgröße $h_y(t)$ (a) und der Stellgröße $h_u(t)$ (b) für $w(t) = s(t)$, $k = 2$ und $T = 0.1$, 0.5, 1, 2



[illegible] [illegible]n der Regelgröße $h_y(t)$ (a) und der [illegible] b) für $w(t) = s(t)$, $k = k_N = 4$ und [illegible]



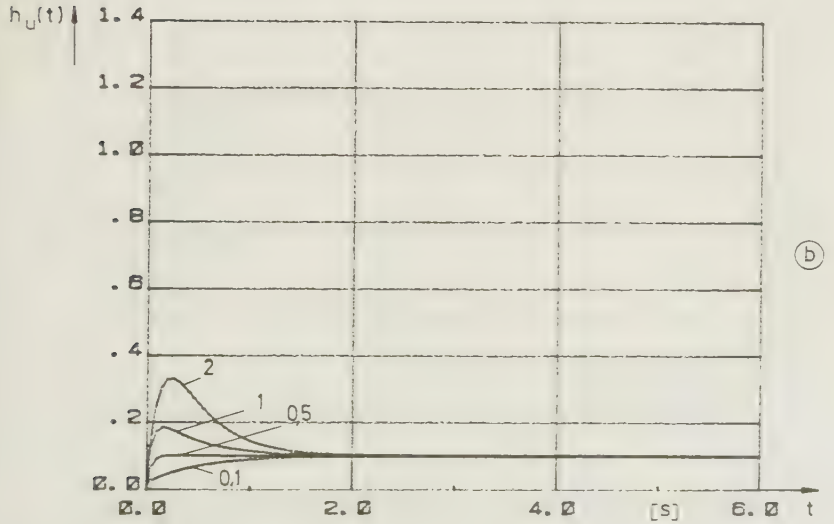


Bild 4.1.6. Übergangsfunktionen der Regelgröße $h_y(t)$ (a) und der Stellgröße $h_u(t)$ (b) für $w(t) = s(t)$, $k = 10$ und $T = 0.1$, 0.5, 1, 2

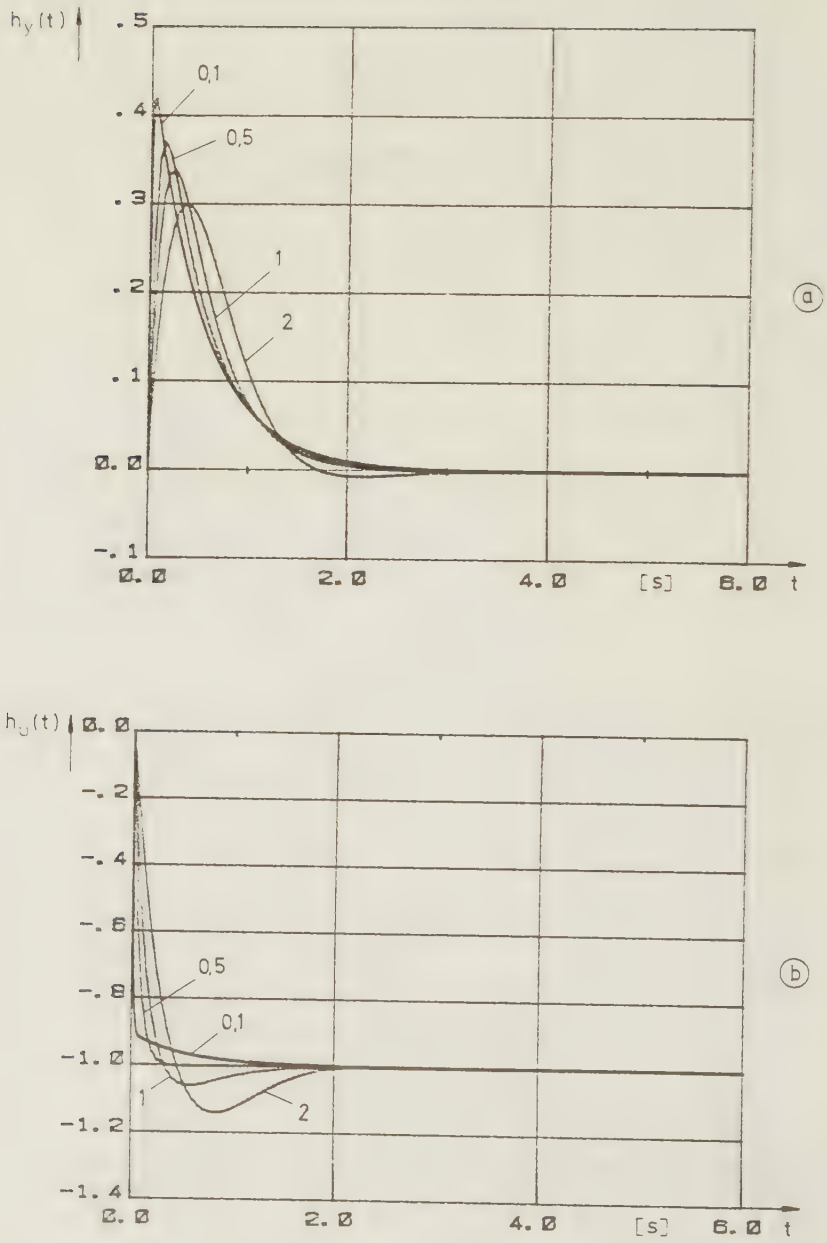
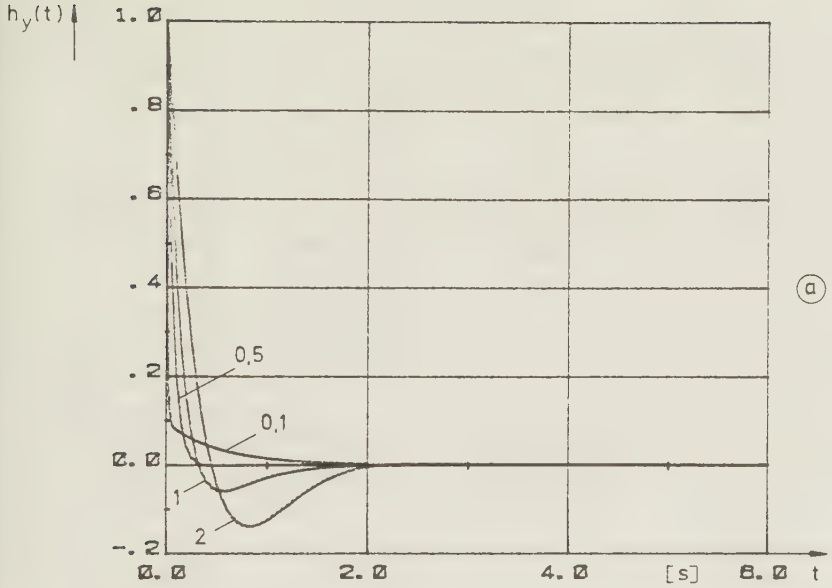


Bild 4.1.7. Übergangsfunktionen der Regelgröße $h_y(t)$ (a) und der Stellgröße $h_u(t)$ (b) für $z_E(t) = s(t)$, $k = k_N = 4$ und $T = 0,1;\ 0,5;\ 1;\ 2$



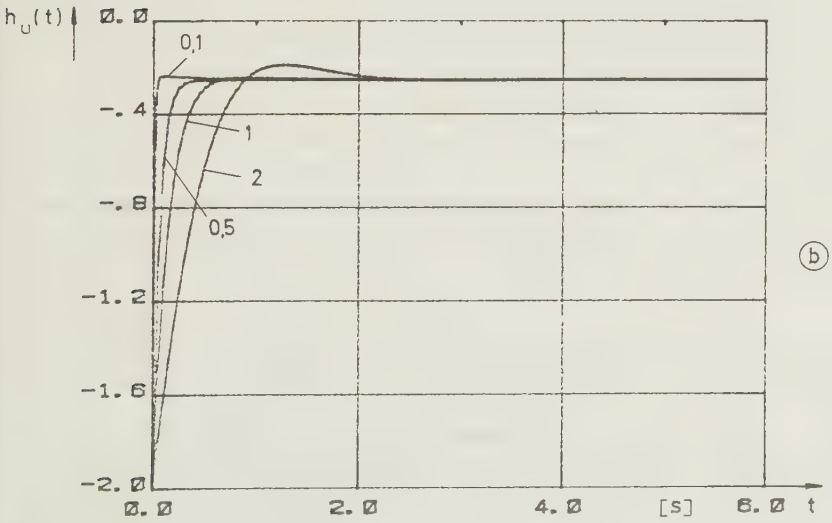


Bild 4.1.8. Übergangsfunktionen der Regelgröße $h_y(t)$ (a) und der Stellgröße $h_u(t)$ (b) für $z_A(t) = s(t)$, $k = k_N = 4$ und $T = 0.1, 0.5, 1, 2$

bedarf. Durch Wahl der Grenze bei $\sigma = -0.7$ konnte sowohl das Überschwingen als auch die Anregelzeit in den gewählten Grenzen gehalten werden. Eine entsprechende Auslegung des Regelkreises, die explizit auch das Überschwingen für kleine σ durch Vorgabe einer Grenzkurve berücksichtigt, ist im folgenden Abschnitt zu finden. Wie den Bildern 4.1.5 und 4.1.6 entnommen werden kann, ist bei zunehmendem Einfluß der Streckenverstärkung k der Einfluß des Parameters T für $T > 0$ nahezu vernachlässigbar. Daraus kann man schliessen, daß eine Erhöhung der Reglerverstärkung k den gleichen Effekt erzeugt. Dieses Prinzip wird mit Hilfe der "High-Gain-Technik" (siehe Kapitel 5) praktiziert. Die Grenzen dieser Technik sind jedoch durch den vorgegebenen Dynamikbereich der Stellgröße gegeben. Für Störungen am Ausgang der Regelstrecke ist außerdem u(0) direkt proportional der Reglerverstärkung.

4.2 Reglersynthese durch Festlegung von Gebieten in der s- oder z-Ebene

Im Kapitel 4.1 wird eine Methode vorgeschlagen, die die Wahl von Bewertungsmatrizen zur Bestimmung der Reglerparameter nach Gl. (4.1.1) mit Hilfe von Gl.(4.1.22) erlaubt. Wünschenswert wäre es, hierbei die Reglerparameter so einzugrenzen, daß die Bestimmung der Koeffizienten von $\underline{r}'$ innerhalb vorgegebener Grenzen erfolgen kann. Das ist z. B. dadurch möglich, daß die Abhängigkeit der Regelergebnisse von bestimmten ausgewählten Reglerparametern untersucht wird, wobei die restlichen Reglerparameter fest vorgegeben werden. Desweiteren kann die Abgrenzung hierbei so erfolgen, wie z. B. in [1] dargestellt wird. Auf diese Methode wird im folgenden Abschnitt näher eingegangen.

4.2.1 Definition von Gebieten im Frequenzbereich

Hierbei steht die Idee Pate, ausgehend von Zeitbereichsvorgaben, das Gebiet in der s- oder z-Ebene durch Grenzkurven zu beschreiben und diese Gebiete mit Hilfe geeigneter Transformationen auf die Reglerparameter abzubilden. Das geschieht nach [1] dadurch, daß für ein gegebenes Gebiet, z. B. nach Bild 4.2.1, Grenzflächen definiert werden.

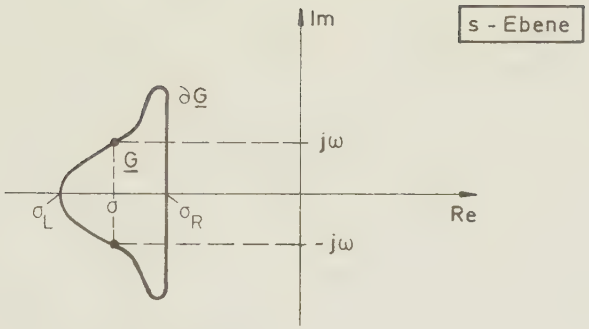


Bild 4.2.1. Gebiet im s-Bereich

Das Gebiet $\underline{G}$ wird begrenzt durch die komplexe Grenzfläche $\partial\underline{G}$ und die reellen Grenzen σ_L und σ_R. Die komplexe Grenzfläche wird durch die Polynome beschrieben, die ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar auf $\partial\underline{G}$ haben. Polynome der Form

$$P(s) = p_o + p_1 s + \ldots + p_{p-1} s^{p-1} + s^p \qquad (4.2.1)$$

enthalten den Faktor

$$Q(s) = (s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega) = s^2 + q_1 s + q_o \text{ für } \sigma < 0$$

mit

$$q_1 = -2\sigma$$

und

$$q_o = \sigma^2 + \omega^2. \qquad (4.2.2)$$

Somit läßt sich P(s) darstellen als

$$P(s) = Q(s)\, R(s)$$

$$= (q_o + q_1 s + s^2)(r_o + r_1 s + \ldots + r_{p-3} s^{p-3} + s^{p-2}). \qquad (4.2.3)$$

In vektorieller Schreibweise lautet Gl.(4.2.3)

$$[\underline{p}^T,\ 1] = [0,\ 0,\ \underline{r}_p^T,\ 1]\ \underline{Q} \qquad (4.2.4)$$

mit den Vektoren

$$\underline{p}^T = [p_0, p_1, \ldots, p_{p-1}],$$

$$\underline{r}_p^T = [r_0, r_1, \ldots, r_{p-3}]$$

und der $(p+1) \times (p+1)$-Matrix

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ q_1 & 1 & & \underline{0} & \vdots \\ q_0 & q_1 & \ddots & & \\ 0 & q_0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & q_0 & q_1 \quad 1 \end{bmatrix} . \qquad (4.2.5)$$

Die Inverse der Matrix $\underline{C}$ ist ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix

$$\underline{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & & \underline{0} & \vdots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \gamma_p & \gamma_{p-1} & & \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix} \qquad (4.2.5a)$$

mit

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -q_1$$

$$\gamma_{i+1} = -q_1\gamma_i - q_0\gamma_{i-1} \text{ für } i = 1,2, \ldots, p-1 .$$

Gl.(4.2.4) hat als Lösung

$$\underline{p}^T [\gamma_1, \gamma_2] = [q_o \gamma_{p-2}, -\gamma_{p-1}]$$

mit

$$\gamma_1^T = [1, 0, -q_o\gamma_o, -q_o\gamma_1, \ldots, -q_o\gamma_{p-3}] \qquad (4.2.6)$$

und

$$\gamma_2^T = [0, 1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p-2}].$$

Mit der Rechenvorschrift nach Gl.(4.2.6) ist es also möglich, das durch $\partial\underline{G}$ begrenzte Gebiet in den Vektorraum $\underline{p}$ unabhängig vom Restpolynom R(s) abzubilden. Der allgemeine Beweis hierzu ist in [1] enthalten. An dieser Stelle soll das Ergebnis an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Für p = 3 ist

$$P(s) = Q(s)\ R(s) = (q_o + q_1 s + s^2)(r_o + s),$$

also

$$[\underline{p}^T, 1] = [p_o, p_1, p_2, 1] = [0, 0, r_o, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 1 & 0 & 0 \\ q_o & q_1 & 1 & 0 \\ 0 & q_o & q_1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [0, 0, \underline{r}^T, 1]\ \underline{Q}\ .$$

Mit dem Ansatz

$$\underline{Q}^{-1}\ \underline{Q} = \begin{bmatrix} \gamma_o & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_o & 0 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_o & 0 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 1 & 0 & 0 \\ q_o & q_1 & 1 & 0 \\ 0 & q_o & q_1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{I}$$

folgt

$$\gamma_0 = 1$$

$$\gamma_1 = -q_0$$

$$\gamma_2 = -q_1\gamma_1 - q_0\gamma_0$$

$$\gamma_3 = -q_1\gamma_2 - q_0\gamma_1 .$$

Daraus läßt sich das Gleichungssystem

$$\text{a:}\quad p_0\gamma_0 + p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \gamma_3 = 0$$

$$\text{b:}\quad p_1\gamma_0 + p_2\gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

$$\text{c:}\quad p_2\gamma_0 + \gamma_1 = r_0$$

$$\text{d:}\quad \gamma_0 = 1$$

ableiten.

Wird nun in Gl.(a) γ_1, γ_2 und γ_3 substituiert, vereinfacht sich das Gleichungssystem zu

$$\text{a:}\quad p_0 - p_1q_1 - p_2q_1\gamma_1 - p_2q_0\gamma_0 = q_1\gamma_2 + q_0\gamma_1$$

$$\text{b:}\quad p_1 + p_2\gamma_1 = -\gamma_2$$

$$\text{c:}\quad p_2 = r_0 - \gamma_1 .$$

Durch Multiplikation von Gl.(b) mit q_1 und anschließender Addition von Gl.(a) und Gl.(b) folgt entsprechend Gl.(4.2.6)

$$[p_0\ p_1\ p_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -q_0\gamma_0 & \gamma_1 \end{bmatrix} = [q_0\gamma_1,\ -\gamma_2].$$

Gl.(4.1.6) zeigt also, daß für jedes Polpaar auf der komplexen Grenze σ_G und beliebigem Polynom $N(s)$ die komplexe Grenze gegeben ist durch den Schnitt der in dieser Gleichung definierten Hyperebenen. Für die reellen Grenzen σ_L und σ_R erhält man im p-Raum

$$P(\sigma_L) = p_o + p_1\sigma_L + \ldots + \sigma_L^p = 0$$

und

$$P(\sigma_R) = p_o + p_1\sigma_R + \ldots + \sigma_R^p = 0\,. \qquad (4.2.7)$$

Als Vektorgleichung formuliert wird daraus

$$\underline{p}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_L \\ \vdots \\ \sigma_L^{p-1} \end{bmatrix} = \underline{p}^T\, \underline{\sigma}_L = -\sigma_L^p \qquad (4.2.8a)$$

und entsprechend

$$\underline{p}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_R \\ \vdots \\ \sigma_R^{p-1} \end{bmatrix} = \underline{p}^T\, \underline{\sigma}_R = -\sigma_R^p\,. \qquad (4.2.8b)$$

4.2.2 Anwendung auf die Regelkreissynthese im Zustandsraum

Der Vollständigkeit halber soll die in [1] verwendete Methode zur robusten Auslegung von Regelkreisen mit Hilfe von Zustandsraummethoden erwähnt werden. Dieses Konzept wird in den weiteren Kapiteln für die Anwendung auf dynamische Ausgangsrückkopplungen ergänzt und auf eine Motorregelung angewendet.

Ist P(s) das charakteristische Polynom des Regelkreises, so ist nun mit Hilfe von Gl.(4.2.6) eine Transformation über den $\underline{p}$-Raum in den interessierenden Reglerparameterraum möglich. Hierfür muß $\underline{p}$ in Abhängigkeit der Reglerparameter dargestellt werden. Die Regelstrecke sei beschrieben durch

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}\,. \tag{4.2.9}$$

Mit Rückführung des Ausgangsvektors

$$u = -\underline{k}_y^T\,\underline{y} + w \tag{4.2.10}$$

folgt mit

$$\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{b}\,\underline{k}_y^T\,\underline{C})\,\underline{x} + \underline{b}\,w \tag{4.2.11}$$

das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises

$$P(s) = \det(s\underline{I} - \underline{A} + \underline{b}\,\underline{k}_y^T\,\underline{C}) = [\underline{p}^T \quad 1]\,\underline{s}_n$$

mit

$$\underline{p}^T = [p_o,\ p_1,\ \ldots,\ p_{n-1}] \tag{4.2.12}$$

und

$$\underline{s}_n^T = [1,\ s,\ \ldots,\ s^n].$$

Nach Berechnung der Determinante kann $\underline{p}^T$ bestimmt und in Gl. (2.2.6) eingesetzt werden. Es wird in [1] jedoch ein anderer Weg beschrieben, der hier nur der Vollständigkeit halber dargestellt werden soll. Mit Hilfe des Leverrier-Algorithmus kann gezeigt werden, daß das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises darstellbar ist als

$$P(s) = Q^*(s) + \underline{k}_y^T\,\underline{C}\,\underline{D}(s)\,\underline{b}, \tag{4.2.13}$$

wobei

$$Q^*(s) = \det(s\underline{I} - \underline{A}) = [q_o^*,\ q_1^*,\ \ldots,\ q_{n-1}^*,\ 1]\,\underline{s}_n = \underline{q}^{*T}\,\underline{x}_n \tag{4.2.14}$$

das charakteristische Polynom des offenen Regelkreises ist.

In Gl.(4.2.13) ist

$$\underline{D}(s)\,\underline{b} = \underline{D}_o\,\underline{b} + \underline{D}_1\,\underline{b}\,s + \ldots + \underline{D}_{n-1}\,\underline{b}\,s^{n-1}$$

mit

$$\begin{aligned}
\underline{D}_{n-1} &= \underline{I},\\
&\vdots\\
\underline{D}_{n-k} &= \underline{A}\,\underline{D}_{n-k-1} + q^*_{n-k-1}\,\underline{I},\\
&\vdots\\
\underline{D}_o &= \underline{A}\,\underline{D}_1 + q^*_1\,\underline{I},\\
\underline{D}_{-1} &= \underline{A}\,\underline{D}_o + q^*_o\,\underline{I} = \underline{O},\\
q^*_o &= -\text{Spur}\,(\tfrac{1}{n}\,\underline{A}\,\underline{D}_o),\\
q^*_1 &= -\text{Spur}\,(\tfrac{1}{n-1}\,\underline{A}\,\underline{D}_1),\\
&\vdots\\
q^*_{n-2} &= -\text{Spur}\,(\tfrac{1}{2}\,\underline{A}\,\underline{D}_{n-2}),\\
q^*_{n-1} &= -\text{Spur}\,(\underline{A}\,\underline{D}_{n-1}).
\end{aligned} \qquad (4.2.15)$$

Wird in Gl.(4.2.13) weiterhin substituiert

$$\underline{W} = [\underline{D}_o\,\underline{b},\ \underline{D}_1\,\underline{b},\ \ldots,\ \underline{D}_{n-1}\,\underline{b}], \qquad (4.2.16)$$

so folgt hiermit

$$[\underline{p}^T \quad 1]\ \underline{s}_n = [\underline{q}^{*T} \quad 1]\ \underline{s}_n + \underline{k}_y^T\,\underline{C}\,\underline{W}\,\underline{s}_{n-1}. \qquad (4.2.17)$$

Diese Gleichung läßt sich umschreiben in

$$\underline{r}^T = \underline{q}^{*T} + \underline{k}_y^T\,\underline{C}\,\underline{W} \qquad (4.2.18)$$

für Ausgangsvektorrückführung und in

$$\underline{p}^T = \underline{q}^{*T} + \underline{k}^T \underline{W} \tag{4.2.19}$$

für Zustandsrückführung.

Ist das System ($\underline{A}$, $\underline{b}$) steuerbar, so ist $\underline{W}$ regulär. Bei Vorgabe in Regelungsnormalform ist $\underline{W}$ die Einheitsmatrix. Für zeitdiskrete Systeme wird ($\underline{A}$, $\underline{b}$) ersetzt durch ($\underline{A}_d$, $\underline{b}_d$). Wird Gl.(4.2.18) in Gl. (4.2.6) eingesetzt, so folgt für die komplexen Grenzen

$$\underline{q}^{*T} [\gamma_1, \gamma_2] + \underline{k}_y^T \underline{C} \underline{W} [\gamma_1, \gamma_2] = [q_o \gamma_{n-2}, -\gamma_{n-1}]. \tag{4.2.20}$$

Für die reellen Grenzen folgt aus den Gln.(4.2.8)

$$\underline{q}^{*T} \underline{\sigma} + \underline{k}_y^T \underline{C} \underline{W} \underline{\sigma} = -\sigma^n. \tag{4.2.21}$$

In [1] werden darüber hinaus einige Regeln diskutiert, die die Anwendung von Gl.(4.2.20) ermöglichen und hier kurz dargestellt werden sollen.

- Bei linearer Unabhängigkeit der Vektoren γ_1 und γ_2 sind $\underline{W} \gamma_1$ und $\underline{W} \gamma_2$ ebenfalls linear unabhängig, wenn ($\underline{A}$, $\underline{b}$) steuerbar ist. Mit $\underline{C} = \underline{I}$ und $\underline{k}_y = \underline{k}$ ist somit sichergestellt, daß sich die in Gl. (4.2.20) definierten Hyperebenen im Endlichen schneiden.

- Im Fall einer Ausgangsvektorrückführung mit Rang $\underline{C} < n$ können $\underline{C} \underline{W} \gamma_1$ und $\underline{C} \underline{W} \gamma_2$ linear abhängig werden. Dann sind die Hyperebenen parallel, und es existiert kein geschlossener Parameterraum.

- Hat der offene Kreis auf dem Rand $\partial \underline{G}$ des Gebietes $\underline{G}$ ein Polpaar, das über den Ausgang nicht beobachtbar ist, so sind beide Hyperebenen identisch.

- Ist für die reelle Grenze $\underline{C} \underline{W} \underline{\sigma} = \underline{O}$ und $\underline{q}^{*T} \underline{\sigma} \neq -\sigma^n$ erfüllt, so ist es nicht möglich, einen Pol nach σ zu legen. Im anderen Fall $\underline{q}^{*T} \underline{\sigma} = -\sigma^n$ ist dieser Pol nicht verschiebbar.

4.2.3 Anwendung auf die Regelkreissynthese mit dynamischer Ausgangsrückkopplung

Wendet man Gl.(1.5.11) auf die Transformationsgleichungen (4.2.6) an, so erhält man für die komplexen Grenzen

$$(\underline{m}^T + \underline{r}^T \underline{M}^T)\ [\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2] = [q_o \gamma_{p-2}, -\gamma_{p-1}] \qquad (4.2.22)$$

und stellvertretend für die reellen Grenzen $\underline{\sigma}_L$ und $\underline{\sigma}_R$ aus Gl.(4.2.8)

$$\underline{m}^T \underline{\sigma} + \underline{r}^T \underline{M}^T \underline{\sigma} = -\sigma^p. \qquad (4.2.23)$$

Für eine Regelungsstruktur nach Gl.(1.5.10) ist $p = 2n$, und $\underline{M}$ ist eine $(2n \times 2n)$-Matrix. Wird für G(s) vorausgesetzt, daß C(s) und D(s) teilerfremd sind, so hat $\underline{M}^T$ vollen Rang und $\underline{M}^T \underline{\gamma}_1$ und $\underline{M}^T \underline{\gamma}_2$ sind linear unabhängig, d. h. daß sich die durch Gl.(4.2.6) definierten Hyperebenen im Endlichen schneiden. Ähnliche Überlegungen wie im vorhergehenden Abschnitt für die reellen Grenzen gelten auch hier. Ist $\underline{M}^T \underline{\sigma} = 0$ und $\underline{m}^T \underline{\sigma} \neq -\sigma^p$, so gilt entsprechend, daß kein Pol nach σ gelegt werden kann. Wenn $\underline{m}^T \underline{\sigma} = -\sigma^p$ erfüllt ist, liegt wiederum mindestens ein ortsfester Pol vor.

In vielen Fällen liegt jedoch keine Regelungsstruktur nach Gl. (1.5.10) vor, sondern PI- oder PID-Regler. Die Dimensionen von $\underline{M}$, $\underline{r}$ und $[\underline{\gamma}_1, \underline{\gamma}_2]$ sind dann vom Reglertyp abhängig. Jedoch können dann hier auch durch Prüfung der linearen Abhängigkeit von $\underline{M}^T \underline{\gamma}_1$ und $\underline{M}^T \underline{\gamma}_2$ Aussagen über die komplexen Grenzen getroffen werden. Hierzu ein Beispiel:

Für die Regelstrecke

$$G(s) = \frac{D(s)}{C(s)} = \frac{d_o}{c_o + c_1 s + s^2}$$

ist der PI-Regler

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_o + b_1 s}{s}$$

vorgesehen. Mit der charakteristischen Gleichung

$$P(s) = C(s)\,A(s) + D(s)\,B(s)$$

folgt analog zu Gl.(4.1.5)

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p_o \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \underline{M}\,\underline{r} + \underline{m} = \begin{bmatrix} d_o & 0 \\ 0 & d_o \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_o \\ c_1 \end{bmatrix}.$$

Für $p = n = 3$ ist Gl.(4.2.6) bereits im Kapitel 4.2.1 behandelt worden. Das Ergebnis lautet

$$\underline{p}^T\,[\gamma_1,\ \gamma_2] = \underline{p}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -q_o\gamma_o & \gamma_1 \end{bmatrix} = [q_o\gamma_1,\ -\gamma_2]$$

mit

$$\gamma_o = 1,$$

$$\gamma_1 = -q_1$$

und

$$\gamma_2 = q_1^2 - q_o.$$

Demnach gilt für die komplexen Grenzen

$$\underline{M}^T\,[\gamma_1,\ \gamma_2] = \begin{bmatrix} d_o & 0 & 0 \\ 0 & d_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -q_o\gamma_o & \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_o & 0 \\ 0 & d_o \end{bmatrix}$$

und für die reellen Grenzen

$$\underline{M}^T\,\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} d_o & 0 & 0 \\ 0 & d_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma \\ \sigma^2 \end{bmatrix} = [d_o,\ d_o\sigma] \neq \underline{0}.$$

Die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Transformation sind also erfüllt. Für dieses Beispiel erhält man aus den Gln.(4.2.22) und (4.2.23) die Ergebnisse

$$[b_o d_o - c_1 q_o \gamma_o,\ b_1 d_o + c_o + c_1 \gamma_1] = [q_o \gamma_1,\ -\gamma_2]$$

für die komplexe Grenze und

$$d_o b_o + (d_o b_1 + c_o)\ \sigma_R + c_1 \sigma_R^2 = -\sigma_R^3$$

für die reelle Grenze σ_R. Zur Eingrenzung des Parameterbereichs $b_o = b_o(b_1)$ wird Gl.(4.2.2) berücksichtigt. Daraus folgt in parametrischer Darstellung

$$b_o = \frac{q_o(c_1 - q_1)}{d_o} = \frac{(\sigma^2 + \omega^2)(2\sigma + c_1)}{d_o}\ ,$$

$$b_1 = -\frac{q_1(q_1 - c_1) + c_o - q_o}{d_o} = -\frac{\sigma(3\sigma + 2c_1) + c_o - \omega^2}{d_o}$$

für die komplexe Grenze und

$$b_o = -b_1 \sigma_R - \frac{\sigma_R(c_o + \sigma_R c_1 + \sigma_R^2)}{d_o}$$

für die reelle Grenze.

In einigen Fällen läßt sich die komplexe Grenze auch in nichtparametrischer Form darstellen, was für die Anwendung sicherlich nicht sinnvoll ist, da die Information über die Lage der Nullstellen auf der komplexen Grenze verlorengeht. Die Durchführbarkeit des Verfahrens hängt stark von der Wahl des Gebiets im s- oder z-Bereich ab und ist nur dann für Entwurfszwecke einsetzbar, wenn die Ergebnisse als Computergrafik vorliegen. Die praktische Durchführung wird im nächsten Abschnitt für ein vermeintlich einfaches Beispiel und für eine Motorregelung gezeigt.

4.3 Robuste Auslegung von Regelkreisen

Das wesentliche Ziel der robusten Auslegung von Regelkreisen besteht darin, Gebiete im s- oder z-Bereich zu definieren, die mit Hilfe der Gln.(4.2.6), (4.2.8), (4.2.18) oder (4.2.20) in den Reglerparameterraum transformiert werden. Hier soll jedoch nicht, wie in [1], der Schwerpunkt auf Zustandsregelung liegen, sondern die Anwendung der Transformation mit Hilfe der Gln.(4.2.22) und (4.2.23) erfolgen. Als Ergebnis der Transformation entstehen Bereiche für mögliche Reglereinstellwerte. Wird nun die Transformation für einen zweiten oder auch mehrere Streckenparametersätze vorgenommen, so entstehen daraus neue Gebiete im Reglerparameterraum. Überlappen sich nun diese Gebiete und läßt sich allen Parametersätzen eindeutig ein Satz Reglerkoeffizienten zuordnen, so ist der Regler simultan für alle verschiedenen Streckenparametersätze ausgelegt. Hiermit ist sichergestellt, daß die Reglereinstellung auch für mehrere verschiedene Streckenparametersätze die vorgegebenen Bedingungen erfüllt.

4.3.1 Die Auswahl der Gebiete im s- oder z-Bereich

Diese richtet sich nach den Anforderungen, die an den Regelkreis gestellt sind. So hat sich nach den Erfahrungen des Autors auch eine bestimmte Vorgehensweise bei der Wahl der jeweiligen Gebiete im s- oder z-Bereich bewährt. Zu Anfang bietet sich an, den Stabilitätsgütebereich nach Bild 4.3.1 (Gebiet S1) durch die reelle Grenze $P(s = \sigma_o)$ für $\sigma_o < 0$ und durch die komplexe Grenze mit $\sigma = \sigma_o$ und $\omega > 0$ festzulegen. Aus Gl.(4.2.2) läßt sich hiermit ableiten

$$q_1 = -2\sigma_o$$

und (4.3.1)

$$q_o = \sigma_o^2 + \omega^2 .$$

Die Anwendung des Gebietes S1 empfiehlt sich immer dann, wenn Pole in der Nähe des Ursprungs vermieden werden sollen. Entstehen z. B. durch Variationen der Streckenparameter reelle Pole in der Nähe

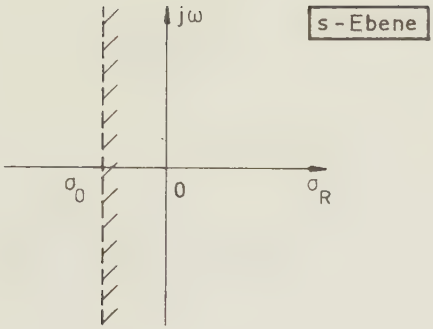


Bild 4.3.1. Gebiet S1

der imaginären Achse, kann es sonst zu langsam krichendem Einschwingverhalten kommen, was in zahlreichen Fällen unerwünscht ist. Zur Abgrenzung von konjugiert komplexen Polpaaren und von reellen Polen, die in der Nähe der imaginären Achse entstehen können, wird im Bild 4.3.2 das abgegrenzte Gebiet im s-Bereich durch die Hyperbel [1]

$$\omega^2 = \frac{1-d^2}{d^2} (\sigma^2 - \sigma_o^2) \quad \text{für } \sigma < \sigma_o \text{ und } d \geq d' \qquad (4.3.2)$$

abgegrenzt. Das als S2 definierte Gebiet wird mit Hilfe von Gl. (4.2.2) beschrieben als

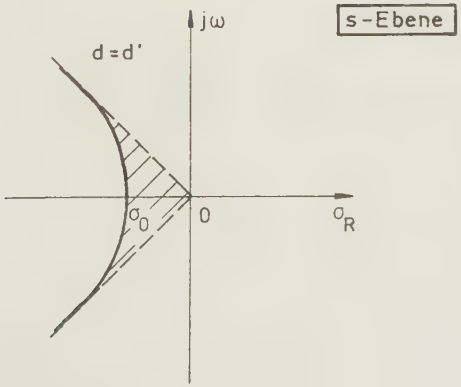


Bild 4.3.2. Gebiet S2

$$q_o = \sigma^2 + \omega^2 = \sigma_o^2 + \frac{1}{d^2}\,(\sigma^2 - \sigma_o^2)$$
$$q_1 = -2\sigma \qquad (4.3.3)$$

für den in Gl.(4.3.2) angegebenen Bereich.

Zur Festlegung genau definierter Kenngrößen innerhalb vorgegebener Grenzen wie Bandbreite und Dämpfung des geschlossenen Regelkreises wird in [1] ein Gebiet vorgeschlagen, das aus einem Kreisscheibenausschnitt um den Punkt s = 0 besteht. Dieses Gebiet wurde in ergänzenden Untersuchungen zu [39] an einigen Beispielen getestet. Hier zeigte sich, daß zwar durch Vorgabe zweier Grenzfrequenzen ω_a, ω_b und minimaler Dämpfung eine simultane Auslegung in einigen Fällen möglich ist, jedoch für d > 1 auch Pole auftreten können, die außerhalb dieses Bereiches liegen. So ist z. B. für n = 2

$$p_o = q_o = \omega^2$$

und

$$p_1 = q_1 = 2\omega d, \qquad (4.3.4)$$

also

$$P(s) = \omega^2 + 2\omega d s + s^2$$

mit den Wurzeln

$$s_{1/2} = \omega(-d \pm \sqrt{d^2-1}).$$

Für d > 1 wandert eine Nullstelle zur imaginären Achse und die andere entgegengesetzt. Gl.(4.3.4) ist also nur für d < 1 sinnvoll einsetzbar, wobei die reellen Grenzen durch ω_a und ω_b gegeben sind.

Im z-Bereich ist das Stabilitätsgebiet durch den Einheitskreis gegeben. Da hierdurch besonders einfache und übersichtliche Transformationsbeziehungen entstehen, liegt es nahe, die regelungstechnischen Anforderungen ebenfalls als Kreisgebiet, wie im Bild 4.3.3 dargestellt, zu formulieren. Eine ähnliche Vorgehensweise bietet sich im s-Bereich an.

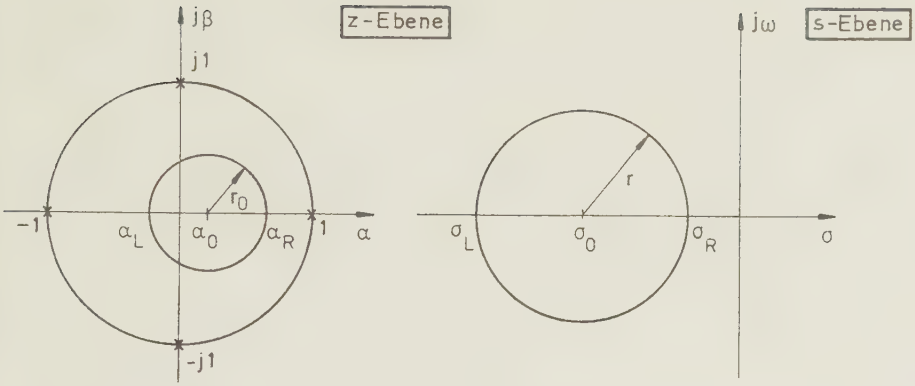


Bild 4.3.3. Gebiet Z_1 und Gebiet S_1

Die Transformation im z-Bereich ist mit Hilfe der Kreisgleichung

$$(\alpha - \alpha_o)^2 + \beta^2 = r_o^2 \tag{4.3.5}$$

und der reellen Grenzen

$$\alpha_R = \alpha_o + r_o$$

und (4.3.6)

$$\alpha_L = \alpha_o - r_o$$

vorzunehmen. Im s-Bereich lautet die Kreisgleichung

$$\omega^2 + (\sigma - \sigma_o)^2 = r^2$$

mit

$$\sigma_L = \sigma_o - \sigma_r \tag{4.3.7}$$

und

$$\sigma_R = \sigma_o + \sigma_r .$$

Die Koeffizienten des Polynoms Q(s) aus Gl.(4.2.2) ergeben sich hiermit zu

$$q_o = \sigma^2 + \omega^2 = \sigma^2 + r^2 - (\sigma - \sigma_o)^2 = r^2 + 2\sigma\sigma_o - \sigma_o^2$$

und (4.3.8)

$$q_1 = -2\sigma.$$

Um die Ziele der Reglersynthese zu demonstrieren, sei an dieser Stelle noch einmal auf das bereits im Kapitel 4.1 behandelte Beispiel

$$G(s) = \frac{D(s)}{D(s)} = \frac{d_o}{c_o + s} \text{ mit } d_o = \frac{k}{T},\ c_o = \frac{1}{T}$$

für

$$1 \leq k \leq 10,$$

$$0.1 \leq T \leq 2$$

eingegangen. Die Nennwerte der Streckenübertragungsfunktion sind bestimmt durch $k_N = 4$ und $T_N = 2$. Mit dem angesetzten PI-Regler

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_o + b_1 s}{s}$$

folgt für Gl.(1.5.11)

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p_o \\ p_1 \end{bmatrix} = \underline{M}\ \underline{r} + \underline{m} = \begin{bmatrix} d_o & 0 \\ 0 & d_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_o b_o \\ d_o b_1 + c_o \end{bmatrix}.$$

Anhand dieses Beispiels werden noch einmal die für die Reglersynthese notwendigen Syntheseschritte verifiziert. Zuerst wird die Regelung mit Hilfe der direkten Methode für den Nennpunkt entworfen und dann unter Berücksichtigung der Parameterabweichungen die Güte der Regelung beurteilt. Daran schließt sich die Frage an, wie $\underline{p}$ gewählt werden muß, damit z. B. "langsame" reelle Pole vermieden werden. Im Anschluß daran wird die Auslegung des Regelkreises mit Hilfe von Gebietstransformationen vorgenommen.

Das Ziel der weiteren Überlegungen ist es, für dieses "einfache" Beispiel die Regelung so auszulegen, daß für verschiedene Betriebszustände, d. h. Wertepaare (k, T), annähernd gleiches dynamisches Verhalten für den geschlossenen Regelkreis erhalten bleibt. Legt

man z. B. bei den Nennwerten $k = K_N = 4$ und $T = T_N = 2$ die Anregelzeit mit 2 sec und das Überschwingen mit 5 % fest, was prinzipiell durch Vorgabe von

$$K_W(s) = \frac{\omega_o^2}{\omega_o^2 + 1.4\ \omega_o s + s^2}$$

möglich ist, so erhält man für $\omega_o = 1.6$ die Reglerparameter

$$\begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_o}{d_{oN}} \\ \frac{p_1 - c_{oN}}{d_{oN}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_o^2}{d_{oN}} \\ \frac{1.4\ \omega_o - c_{oN}}{d_{oN}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.28 \\ 0.87 \end{bmatrix}.$$

Die Wurzeln des charakteristischen Polynoms liegen somit bei

$$s_{1/2N} = \omega_o(-0.7 \pm j0.714) = -1.12 \pm j1.143\ .$$

Wählt man zwei weitere Betriebspunkte aus, z. B.

$$\begin{bmatrix} d_{omax} \\ c_{omax} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{max}}{T_{min}} \\ \frac{1}{T_{min}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} d_{omin} \\ c_{omin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_{min}}{T_{max}} \\ \frac{1}{T_{max}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

so ist

$$p_{max} = \begin{bmatrix} p_{omax} \\ p_{1max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{omax}\ b_o \\ d_{omax}\ b_1 + c_{omax} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 97 \end{bmatrix}$$

mit den Wurzeln

$$s_{1/2max} = \begin{cases} -1.338 \\ -95.662 \end{cases}$$

und

$$\underline{p}_{min} = \begin{bmatrix} p_{omin} \\ p_{1min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{omin}\, b_o \\ d_{omin}\, b_1 + c_{omin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.935 \end{bmatrix}$$

mit

$$s_{1/2min} = -0.4675 \pm j0.649 .$$

Der zweite Fall zeigt, daß für $k = 1$ und $T = 2$ das konjugiert komplexe Polpaar nach rechts wandert, wodurch die Bandbreite des Regelkreises verringert wird und es zu langsamerem Einschwingen mit größerem Überschwingen kommt. Will man reelle Nullstellen in bestimmten Gebieten ausschließen, so kann die Lage der Nullstellen des charakteristischen Polynoms im ersten Fall ebenfalls nicht akzeptabel sein.

Zu untersuchen ist nun, unter welchen Bedingungen komplexe Nullstellen für P(s) in Abhängigkeit der Vorgabeparameter $\underline{p}$ und der Streckenparameter existieren. Hierfür wird der Ansatz

$$P(s) = \omega^2 + 2d\omega s + s^2 \quad \text{mit } \omega > 0,\ d > 0$$

gemacht. Die Reglerparameter

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega^2}{d_o} \\ \frac{2d\omega - c_o}{d_o} \end{bmatrix} \tag{4.3.9}$$

ergeben für jeden anderen Betriebspunkt $d_o' = \frac{k'}{T'}$ und $c_o' = \frac{1}{T'}$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\underline{p}' = \begin{bmatrix} p_o' \\ p_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_o'\, b_o \\ d_o'\, b_1 + c_o' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d_o'}{d_o}\, \omega^2 \\ \frac{d_o'}{d_o}\,(2d\omega - c_o) + c_o' \end{bmatrix}. \tag{4.3.10}$$

Unter Berücksichtigung von $k' > 0$ und $T' > 0$ erhält man als Stabilitätsbedingung für $k = k_N < k'$

$$\omega > (c_o - \frac{d_o}{d'_o} c'_o) \frac{1}{2d} = \frac{1}{2dT} (1 - \frac{k}{k'}) = \omega_o .$$

Für $k' = k_{max} = 10$ ist demnach

$$\omega > \omega_o = \frac{0.15}{d}$$

beim Entwurf zu berücksichtigen.

Eine zusätzliche Bedingung kommt hinzu, wenn vermieden werden soll, daß die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_R(s)\ G(s)}{1 + G_R(s)\ G(s)} = \frac{\frac{d'_o}{d_o} (\omega^2 + (2d\omega - c_o)s)}{P'(s)}$$

nichtminimalphasig wird. Da der Regler für $T = T_N$ ausgelegt ist, muß hierfür die Bedingung

$$\omega > \frac{0.25}{d}$$

erfüllt sein. Für die Stellgröße gilt

$$u_w(0) = \frac{2d\omega - c_o}{d_o} < u_{wo},$$

woraus leicht

$$\omega < \frac{u_{wo}\ k+1}{2dT} = \frac{1.25}{d}$$

für $u_{wo} = 1$ zu ermitteln ist. Prinzipiell ist also als Vorgabe

$$\frac{0.25}{d} < \omega < \frac{1.25}{d}$$

möglich.

Die Ergebnisse dieser wenigen Überlegungen zeigen deutlich, daß bei Festlegung des sog. Nominalverhaltens immer zusätzliche Bedingungen berücksichtigt werden müssen, die wiederum Einfluß auf das vorgebbare Regelverhalten haben. Weitere Bedingungen kommen hinzu, wenn man als Stabilitätsgebiete Kreisscheibenausschnitte analog zu Gl.(4.3.4) für ω_a, ω_b und $d < 1$ vorgeben will. Hier muß vorab geklärt werden, unter welchen Vorgabegedingungen und bei welchen Parameteränderungen komplexe Nullstellen für P'(s) auftreten.

Aus Gl.(4.3.10) läßt sich hierfür die Bedingung

$$(d'_o\, b_1 + c'_o)^2 - 4d'_o\, b_o < 0 \qquad (4.3.11)$$

ableiten. Gl.(4.3.9) in Gl.(4.3.11) eingesetzt liefert die Beziehung

$$\frac{d'^2_o}{d^2_o}\,(2d\omega - c_o)^2 + 2\,\frac{d'_o}{d_o}\,(2d\omega - c_o)\,c'_o + c'^2_o - 4\,\frac{d'_o}{d_o}\,\omega^2 < 0\,. \qquad (4.3.12)$$

Mit der Substitution $f = \dfrac{d'_o}{d_o} > 0$ sind für

$$\omega^2 4f(fd^2 - 1) - \omega 4fd(fc_o - c'_o) + (fc_o - c'_o)^2 < 0 \qquad (4.3.13)$$

die Fälle

1. $fd^2 - 1 > 0$
2. $fd^2 - 1 < 0$

und

3. $fd^2 - 1 = 0$

zu untersuchen. Wird

$$\varepsilon = fc_o - c'_o = \frac{1}{T'}\left[\frac{k'}{k} - 1\right] \qquad (4.3.14)$$

substituiert, so erhält man für Fall 3 die Lösung

$$\omega_3 > \frac{\varepsilon}{4fd} = \frac{c_o - d^2 c_o'}{4d} \quad \text{für } k' > k. \tag{4.3.15}$$

Gl.(4.3.13) hat für Fall 1 die Lösung

$$\frac{\varepsilon}{2(fd^2-1)} \left(d - \frac{1}{\sqrt{f}}\right) < \omega < \frac{\varepsilon}{2(fd^2-1)} \left(d + \frac{1}{\sqrt{f}}\right) \quad \text{für } k' > k. \tag{4.3.16}$$

Im Fall 2 hat die Ungleichung

$$\omega^2 + \omega \frac{d\,\varepsilon}{(1 - fd^2)} - \frac{\varepsilon^2}{4f(1 - fd^2)} > 0 \tag{4.3.17}$$

die Lösungen

$$\omega > \frac{\varepsilon}{2(1 - fd^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{f}} - d\right) \quad \text{für } k' > k \tag{4.3.18}$$

und

$$\omega > \frac{-\varepsilon}{2(1 - fd^2)} \left(d + \frac{1}{\sqrt{f}}\right) \quad \text{für } k' < k\,. \tag{4.3.19}$$

Mit diesen allgemeinen Ergebnissen können nun durch Vorgabe von ω und d für festgelegte Parameterbereiche der Regelstrecke unerwünschte reelle Wurzeln des charakteristischen Polynoms P'(s) ausgeschlossen werden, wobei jedoch wiederum für jeden Anwendungsfall die Lage der Nullstellen von P'(s) beurteilt werden muß. Dies ist insbesondere dann von Interesse, wenn aus dem ermittelten Gebiet der möglichen Reglerkoeffizienten Werte ausgewählt werden sollen. Das angeführte Beispiel zeigt jedoch auch, daß zahlreiche Bedingungen, die nicht direkt vorgegeben werden können, beim Reglerentwurf berücksichtigt werden müssen. Zur vollständigen Darstellung des behandelten Beispiels wird der Regelkreis für die drei Betriebspunkte

1. $k = k_1 = 1, \quad T = T_1 = 2$
2. $k = k_N = 4, \quad T = T_N = 2$

und

3. $k = k_2 = 10, \quad T = T_2 = 0.1$

ausgelegt.

Will man z. B. einen schnellen Überblick über den möglichen Bereich der einstellbaren Reglerkoeffizienten bekommen, so bietet sich an, das Gebiet im s-Bereich durch eine Hyperbel gemäß Bild 4.3.2 festzulegen. Hiermit können, wie bereits bemerkt, Nullstellen des charakteristischen Polynoms in der Nähe der imaginären Achse durch entsprechende Wahl der Reglerkoeffizienten vermieden werden. Die Transformation vom festgelegten Gebiet, hier im s-Bereich, in die Ebene der Reglerkoeffizienten wird entsprechend der Gl.(4.2.6) für n = 2

$$\underline{p}^T [\gamma_1, \gamma_2] = \underline{p}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [q_o\gamma_o, -\gamma_1] = [q_o, q_1] \qquad (4.3.20)$$

vorgenommen. Daraus folgt

$$\underline{p}^T = [b_o d_o, d_o b_1 + c_o] = [p_o, p_1] = [q_o, q_1]. \qquad (4.3.21)$$

Die Anwendung von Gl.(4.2.7) liefert die Transformationsbeziehung

$$p_o + p_1\sigma_o + \sigma_o^2 = 0$$

für die reelle Grenze σ_o in Form von

$$b_o = - b_1\sigma_o - \frac{\sigma_o}{d_o} (c_o + \sigma_o). \qquad (4.3.22)$$

Da als Stabilitätsgütegebiet die in Gl.(4.3.2) beschriebene Hyperbel verwendet wird, gilt für die komplexe Grenze in parametrischer Beschreibung

$$b_o = \frac{1}{d_o} \left[\sigma_o^2 + \frac{1}{d^2} (\sigma^2 - \sigma_o^2)\right]$$

und (4.3.23)

$$b_1 = - \frac{2\sigma + c_o}{d_o} \quad \text{für } \sigma < \sigma_o .$$

Die Gl.(4.3.23) kann ebenso als

$$b_o = \frac{\sigma_o^2}{d_o}\left[1 - \frac{1}{d^2}\right] + \frac{1}{d_o d^2}\,\frac{1}{4}\,(d_o b_1 + c_o)^2 \qquad (4.3.24)$$

dargestellt werden. Allerdings geht bei Auswertung dieser Beziehung die Abhängigkeit von σ verloren, so daß etwaige graphische Darstellungen auf der Basis von Gl.(4.3.24) nicht mehr in σ parametriert werden können. In einigen Fällen kann das nach links offene Hyperbelgebiet durch $\sigma_g < \sigma_o$ und $0 < \omega < \frac{1-d^2}{d^2}\,(\sigma_g^2 - \sigma_o^2) = \omega_g$ abgegrenzt werden. Die Gln.(4.3.22) und (4.3.23) müssen dann ergänzt werden durch

$$b_o = - b_1\sigma_g - \frac{\sigma_g}{d_o}\,(c_o + \sigma_g) \qquad (4.3.25)$$

für die reelle Grenze und

$$b_o = \frac{\sigma_g^2 + \omega^2}{d_o}, \quad 0 < \omega < \omega_g$$

$$b_1 = - \frac{2\sigma_g + c_o}{d_o} \qquad (4.3.26)$$

für die komplexe Grenze.

Beim grafikunterstützten Entwurf wird so vorgegangen, daß zuerst die Forderungen an das dynamische Verhalten des geschlossenen Regelkreises in entsprechende Daten für das Hyperbelgebiet nach Gl. (4.3.2) umgesetzt werden. Hierfür wird gefordert, daß für eine Dämpfung von $d = 0.7$ alle Nullstellen von $P'(s)$ links von $\sigma = -1$ liegen sollen. Zusätzlich hierzu wird das ursprünglich nach links offene Gebiet durch $\sigma_g = -15$ in den Gln.(4.3.25) und (4.3.26) abgegrenzt. Um einen schnellen Überblick über die Reglerparameterbereiche in den verschiedenen Betriebspunkten zu bekommen, sind in den Bildern 4.3.4 bis 4.3.6 die möglichen Gebiete $b_o = b_o(b_1)$ bei identischen Anforderungen an den Regelkreis aufgezeichnet.

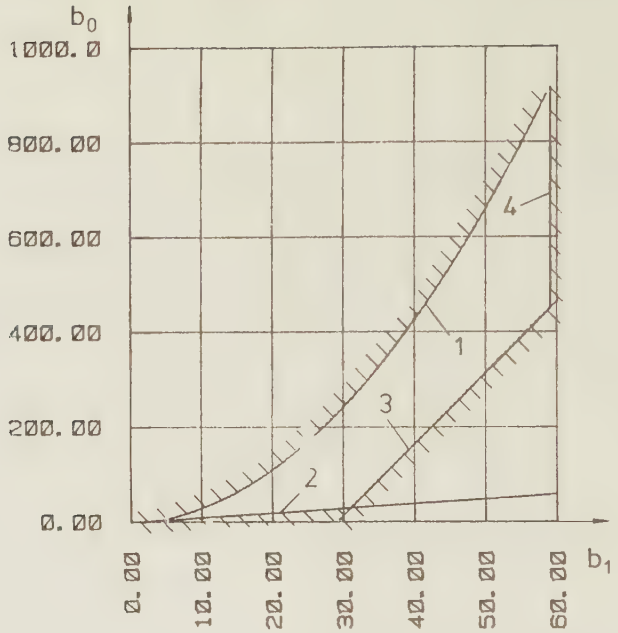


Bild 4.3.4. Reglerparameterbereich für den Betriebspunkt k = 1, T = 2

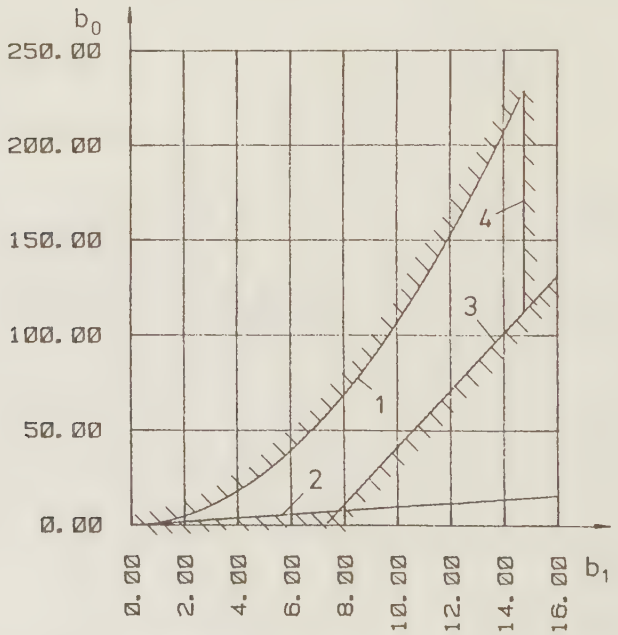


Bild 4.3.5. Reglerparameterbereich für den Betriebspunkt k = 4, T = 2

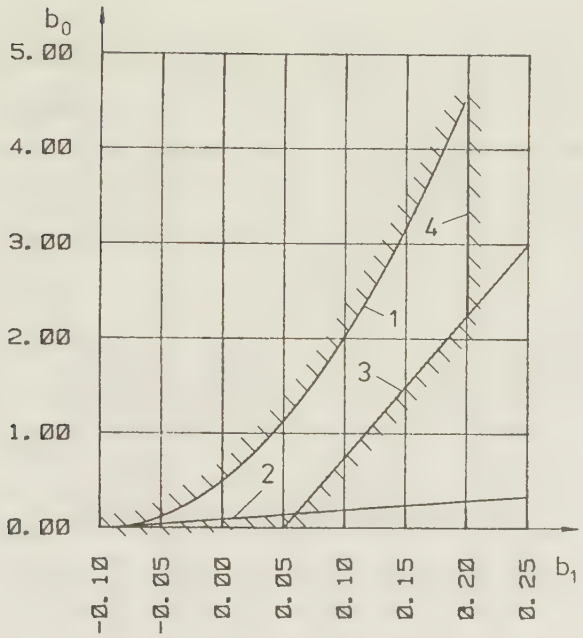


Bild 4.3.6. Reglerparameterbereich für den Betriebspunkt k = 10, T = 0.1

Berücksichtigt sind hier die Gln.(4.3.25) und (4.3.26), deren grafische Auswertung in den Bildern als 3 und 4 numeriert sind. Die Darstellung der Gln.(4.3.23) und (4.3.22) ist als 1 und 2 gekennzeichnet. In Bild 4.3.6 spiegelt sich die bereits gemachte Erkenntnis wider, daß für k = 10 und T = 0.1 bei den gestellten Anforderungen der Reglerparameterbereich stark eingeschränkt ist. Läßt sich noch für die Betriebspunkte 1 und 2 ein gemeinsames überlappendes Gebiet finden (siehe Bild 4.3.7), so ist dies unter Einbeziehung von Betriebspunkt 3 nicht mehr möglich.

Bild 4.3.6 zeigt jedoch auch, daß überlappende Gebiete nur dann auftreten können, wenn auf eine Berücksichtigung der Gln.(4.3.25)

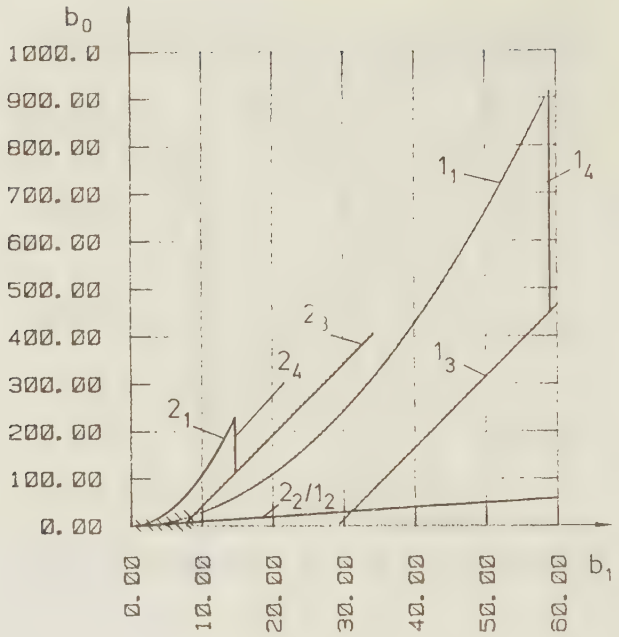


Bild 4.3.7. Reglerparameterbereiche für die Betriebspunkte 1 und 2

und (4.3.26) verzichtet wird. Bei Beibehaltung von $\sigma_o = -1$ und $d = 0.7$ ist ein simultanes Gebiet für alle drei Betriebspunkte möglich, wenn der Regler aus dem schraffierten Gebiet in Bild 4.3.8 gewählt wird. Wählt man z. B. $b_o = 6$ und $b_1 = 5.5$, so hat das charakteristische Polynom die Nullstellen

1. $k = 1$, $T = 2$: $s_{1/2} = -1.625 \pm j0.6$

2. $k = 4$, $T = 2$: $s_1 = -1.16$, $s_2 = -10.34$

3. $k = 10$, $T = 0.1$: $s_1 = -1.07$, $s_2 = -558.9$.

Selbstverständlich ist auch die Wahl eines anderen Parameterpaares (b_o, b_1) aus diesem Bereich möglich, um z. B. größere Variationen der Reglerparameter zuzulassen.

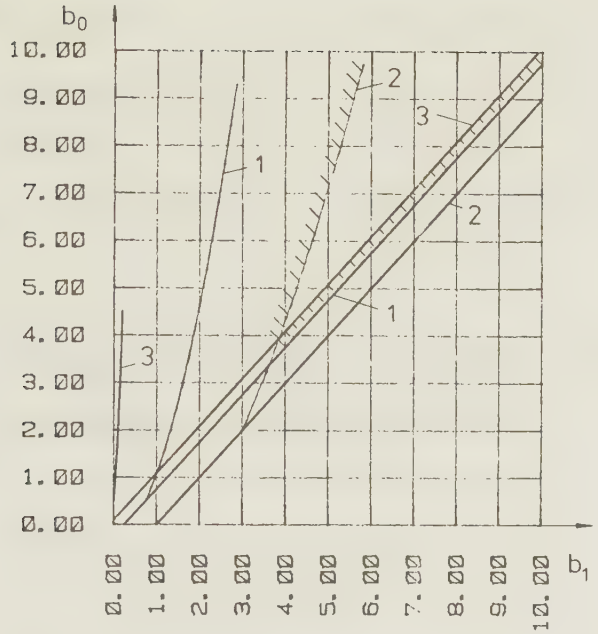


Bild 4.3.8. Reglerparameterbereich für die simultane Auslegung aller drei Betriebspunkte

4.3.2 Reglerentwurf für eine Gleichstrommaschine

Ausgangspunkt für die Modellbildung ist die im Bild 4.3.9 dargestellte Ersatzschaltung einer Gleichstrommaschine.

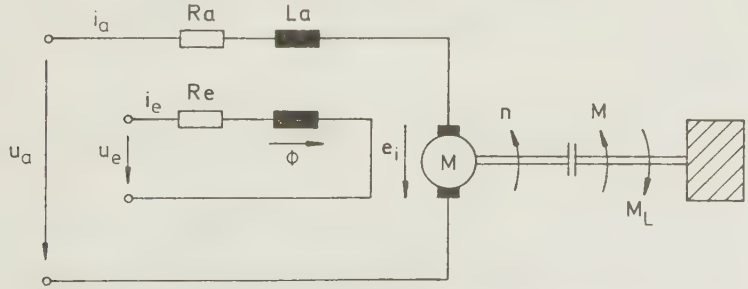


Bild 4.3.9. Ersatzschaltung einer Gleichstrommaschine

Ohne Berücksichtigung der Ankerrückwirkung gilt für den Ankerkreis

$$u_a(t) = R_a\, i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_i(t), \tag{4.3.27}$$

wobei die Ankerinduktivität L_a und der Ankerwiderstand R_a als konstant angenommen werden. Die induzierte EMK $e_i(t)$ ist gegeben durch

$$e_i(t) = K_1\, \phi(t)\, n(t). \tag{4.3.28}$$

Hierin ist $n(t)$ die Drehzahl der Maschine, K_1 eine Maschinenkonstante, die von der Bauform abhängig ist, und $\phi(t)$ der magnetische Fluß, der eine Funktion des Erregerstroms $i_e(t)$ ist. Der Motor erzeugt das Drehmoment

$$M(t) = K_2\, \phi(t)\, i_a(t). \tag{4.3.29}$$

K_2 ist ebenfalls eine bauformabhängige Maschinenkonstante. Um das Lastmoment $M_L(t)$ anzutreiben, muß das Beschleunigungsmoment gleich der Differenz zwischen $M(t)$ und $M_L(t)$ sein, also

$$M_b(t) = M(t) - M_L(t) = 2\pi\, J \frac{dn(t)}{dt}\ . \tag{4.3.30}$$

J stellt das gesamte Trägheitsmoment von Anker, Getriebe und Last dar.

Für die weiteren Überlegungen werden die auftretenden Größen auf die Werte i_{aN}, ϕ_N, n_o und u_{aN} bezogen und mit einem "*" gekennzeichnet. Die normierten Größen Motormoment und induzierte EMK sind demnach

$$e_i^*(t) = \frac{e_i(t)}{u_{aN}} = \frac{K_1\, \phi(t)\, n(t)}{K_1\, \phi_N\, n_o} = \phi^*(t)\, n^*(t) \tag{4.3.31}$$

und

$$M^*(t) = \frac{M(t)}{M_N} = \frac{K_2\, \phi(t)\, i_a(t)}{K_2\, \phi_N\, i_{aN}} = \phi^*(t)\, i_a^*(t). \tag{4.3.32}$$

Gl.(4.3.29) und Gl.(4.3.30) lassen sich mit

$$T_M = \frac{2\pi\ J\ n_N}{M_N} = \frac{2\pi\ J\ n_N}{K_2\ \phi_N\ i_{aN}} \tag{4.3.33}$$

in

$$M^*(t) - M_L^*(t) = T_M \frac{dn^*(t)}{dt} \tag{4.3.34}$$

umformen.

Für den Ankerkreis läßt sich Gl.(4.3.27) umformulieren in

$$K_A(u_a^*(t) - e_i^*(t)) = T_A \frac{di_a^*(t)}{dt} + i_a^*(t)$$

mit

$$K_A = \frac{u_{aN}}{R_a\ i_{aN}} \tag{4.3.35}$$

und

$$T_A = \frac{L_a}{R_a} \ .$$

Für $\phi^*(t) \neq 1$ erhält man das in Bild 4.3.10 dargestellte Strukturbild.

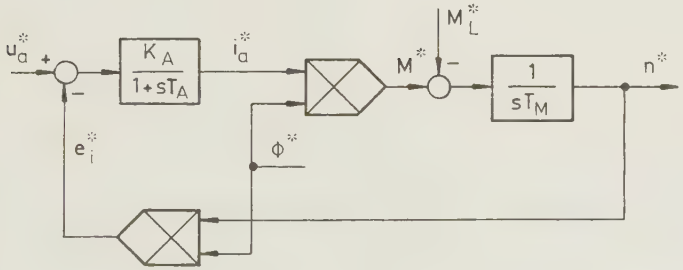


Bild 4.3.10. Strukturbild des Gleichstrommotors

Im Nennbetrieb $\phi = \phi_N$ vereinfacht sich das im Bild 4.3.10 dargestellte Blockschaltbild so, daß die Drehzahl in Abhängigkeit der Ankerspannung gegeben ist durch

$$\frac{N(s)}{U(s)} = \frac{K_A}{K_A + sT_M(1 + sT_A)} \quad . \tag{4.3.36}$$

Diese Modellbildung verzichtet in Anlehnung an [11] auf einen Ankerstromregelkreis. Für das Modell des Stromrichters ist nach [4] für eine Pulszahl von p = 2 der Bereich für die Totzeit als

$$0 \leq T_t \leq 10 \text{ msec}$$

anzusetzen. Die komplette Darstellung des im weiteren benutzten Regelkreises ist in Bild 4.3.11 zu finden.

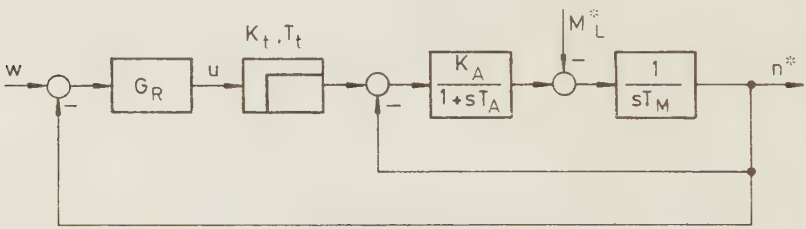


Bild 4.3.11. Regelkreis für die Drehzahlregelung

Eine eingehende Untersuchung des am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung der Ruhr-Universität Bochum vorhandenen Demonstrationsmodells für Drehzahlregelung der Firma Siemens [30] ergab für den Antrieb die folgenden Daten [32]:

$K_t = 3.46,$

$K_A = K_{An} = 1.37$ für den nichtlückenden Betrieb,

$K_A = K_{Al} = 0.65$ für den lückenden Betrieb,

$T_A = T_{An} = 26.5$ msec für den nichtlückenden Betrieb,

$T_A = T_{Al} = 0$ für den lückenden Betrieb

und

$T_M = 285$ msec.

Für die Reglersynthese entsteht somit das Problem, für die beiden Fälle lückender und nichtlückender Betrieb den Regelkreis simultan auszulegen. In diesen beiden Fällen sind die Übertragungsfunktionen gegeben durch

$$G_l(s) = \frac{K_t \, K_{Al} \, e^{-sT_t}}{K_{Al} + sT_M} \tag{4.3.37}$$

für den lückenden Betrieb und

$$G_n(s) = \frac{K_t \, K_{An} \, e^{-sT_t}}{K_{An} + sT_M(1 + sT_{An})} \tag{4.3.38}$$

für den nichtlückenden Betrieb.

Die diskrete Motorregelung wird nun für eine Abtastzeit von $T = 0.1$ sec so ausgelegt, daß, unter Berücksichtigung eines Haltegliedes nullter Ordnung und $T > T_t$, die Übertragungsfunktionen

$$G_l(z) = \frac{d_o' + d_1' \, z^{-1}}{1 + c_1' \, z^{-1}} \, z^{-1} \tag{4.3.39}$$

und

$$G_n(z) = \frac{d_o + d_1 \, z^{-1} + d_2 \, z^{-2}}{1 + c_1 \, z^{-1} + c_2 \, z^{-2}} \, z^{-1} \tag{4.3.40}$$

mit

$d_o' = 0.6421$ $\qquad$ $d_o = 0.9762$

$d_1' = 0.0635$ $\qquad$ $d_1 = 0.4569$

$c_1' = -0.7961$ $\qquad$ $d_2 = 8.2 \cdot 10^{-4}$

$c_1 = -0.609$

$c_2 = 0.023$

mit Hilfe eines Standard-PI-Reglers der Form

$$G_R(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_o + b_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{4.3.41}$$

simultan behandelt werden können.

An das Ergebnis der Reglersynthese wird die Bedingung gestellt, daß für beide Fälle die Pole des geschlossenen Regelkreises innerhalb des Kreisgebietes nach Bild 4.3.3 liegen sollen. Hiermit ist z. B. sichergestellt, daß keine Pole in der Nähe des Punktes $z = 1$ liegen, d. h. langsam kriechendes Einschwingen in einen Betriebspunkt vermieden wird. Zur Festlegung der möglichen Werte für α_o, α_L und α_R wird für beide Fälle eine Transformation mit Hilfe der Gln.(4.2.22) und (4.2.23) vorgenommen. Für den nichtlückenden Fall erhält man analog zu Gl.(1.5.11)

$$\underline{M}_n \, \underline{r} + \underline{m}_n = \begin{bmatrix} o & d_2 \\ d_2 & d_1 \\ d_1 & d_o \\ d_o & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{on} \\ b_{1n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o \\ -c_2 \\ c_2 - c_1 \\ c_1 - 1 \end{bmatrix} = \underline{p}_n = \begin{bmatrix} p_{on} \\ p_{1n} \\ p_{2n} \\ p_{3n} \end{bmatrix}. \tag{4.3.42}$$

Jeder Pol $z = \alpha < 1$ kann mit Hilfe der Transformationsgleichung (4.2.8) in die Parameter b_{on} und b_{1n} durch

$$P_n(\alpha) = p_{on} + p_{1n}\alpha + p_{2n}\alpha^2 + p_{3n}\alpha^3 + \alpha^4 = o \tag{4.3.43}$$

abgebildet werden. Im Ergebnis treten die Reglerparameter in der linearen Form

$$b_{on} = -\frac{b_{1n}}{\alpha} + \frac{c_2 - (c_2 - c_1)\alpha - (c_1 - 1)\alpha^2 - \alpha^3}{d_2 + d_1\alpha + d_o\alpha^2} \tag{4.3.44}$$

auf.

Für die Ermittlung der reellen Grenzen ist in dieser Gleichung $\alpha = \alpha_R$ und $\alpha = \alpha_L$ einzusetzen. Die komplexe Grenze läßt sich für $n = 4$ mit Gl.(4.2.6) schreiben als

$$\underline{P}_n^T \, [\gamma_1, \gamma_2] = [q_o\gamma_2, -\gamma_3] \tag{4.3.45}$$

mit

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -q_o\gamma_o & \gamma_1 \\ -q_o\gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

und

$$\gamma_o = 1,$$
$$\gamma_1 = -q_1,$$
$$\gamma_2 = q_1^2 - q_o,$$
$$\gamma_3 = -q_1^3 + 2q_o\, q_1 .$$

Mit Gl.(4.3.5) ist

$$q_o = \alpha^2 + \beta^2 = r_o^2 + 2\alpha\alpha_o - \alpha_o^2$$

und (4.3.46)

$$q_1 = -2\alpha .$$

Gl.(4.3.45) liefert ein lineares Gleichungssystem in parametrischer Form für die beiden Unbekannten $b_o(\alpha)$ und $b_1(\alpha)$, welches die Form hat

$$b_{on} = b_{1n}\, \varepsilon_{1n} + \varepsilon_{2n}$$
$$b_{1n} = b_{on}\, \varepsilon_{3n} + \varepsilon_{4n} . \tag{4.3.47}$$

Die Terme ε_{in} für $i = 1, \ldots, 4$ sind abhängig von den Streckendaten α_o, α und r_o und lauten

$$\varepsilon_{1n} = \frac{d_o q_o - d_2}{d_o q_o q_1 - d_1 q_o} ,$$

$$\varepsilon_{2n} = \frac{q_1^2 - q_o + q_1(1-c_1)+(c_2-c_1)}{d_o q_1 - d_1} ,$$

$$\varepsilon_{3n} = \frac{d_1 q_1 - d_2 - d_o(q_1^2-q_o)}{d_1 - d_o q_1}$$

und

$$\varepsilon_{4n} = \frac{c_2 + q_1(c_2-c_1)+(q_1^2-q_o)(1-c_1) + q_1^3 - 2q_o q_1}{d_1 - d_o q_1} .$$

Gl.(4.3.47) hat die Lösung

$$\begin{bmatrix} b_{on} \\ b_{1n} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \varepsilon_{1n}\varepsilon_{3n}} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{1n} \\ \varepsilon_{3n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{2n} \\ \varepsilon_{4n} \end{bmatrix} . \qquad (4.3.48)$$

Die Gln.(4.3.44) für $\alpha = \alpha_R$ und $\alpha = \alpha_L$ und (4.3.48) beschreiben somit für den nichtlückenden Fall den Reglerparameterbereich $b_{on} = f_n(b_{1n})$. Im lückenden Betriebsfall gilt entsprechend Gl.(4.3.42)

$$\underline{M}_1 \, \underline{r} + \underline{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 & d_1' \\ d_1' & d_o' \\ d_o' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -c_1' \\ c_1' - 1 \end{bmatrix} = \underline{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{o1} \\ p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} \qquad (4.3.49)$$

die Transformationsbeziehung für die komplexe Grenze

$$\underline{p}_1^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -q_o & -q_1 \end{bmatrix} = [-q_o q_1, \; -q_1^2 + q_o] , \qquad (4.3.50)$$

womit wiederum ein Gleichungssystem in parametrierter Form

$$\begin{aligned} b_{o1} &= b_{11}\,\varepsilon_{11} + \varepsilon_{21} \\ b_{11} &= b_{o1}\,\varepsilon_{31} + \varepsilon_{41} \end{aligned} \qquad (4.3.51)$$

mit den gebietsabhängigen Koeffizienten

$$\varepsilon_{11} = \frac{d_1'}{d_o' q_o} ,$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{q_1 - c_1' + 1}{d_o'} ,$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{d_o' q_1 - d_1'}{d_o'}$$

und

$$\varepsilon_{41} \quad \frac{c_1' q_1 + q_o - q_1^2 - q_1 + c_1'}{d_o'}$$

gegeben ist. Die Lösung dieses Gleichungssystems erfolgt durch Gl.(4.3.48), wobei nur der Index n durch 1 zu ersetzen ist. Die reelle Grenze gilt analog zu Gl.(4.3.43)

$$P_1(\alpha) = p_{o1} + p_{11}\alpha + p_{21}\alpha^2 + \alpha^3 = 0 .$$

Daraus ergibt sich

$$b_{o1} = - \frac{b_{11}}{\alpha} + \frac{(1-\alpha)[c_1' + \alpha]}{d_1' + d_o'\alpha} \qquad (4.3.52)$$

mit $\alpha = \alpha_L$ für die linke und $\alpha = \alpha_R$ für die rechte reelle Grenze. Die Gln.(4.3.48) und (4.3.51) sind hierbei noch völlig unabhängig von der Wahl von q_o und q_1 und können dazu benutzt werden, verschiedenartige Anforderungen an die Regelgröße, d. h. an die Lage der Pole des geschlossenen Regelkreises zu stellen. Im folgenden wird die Gl.(4.3.46) berücksichtigt. Hierbei soll die numerische und graphische Auswertung die Frage beantworten, für welche Werte α_o und r_o eine simultane Auslegung des Regelkreises möglich ist. d. h. welche Reglerparameter aus der Schnittmenge der beiden entstehenden Gebiete gewählt werden können.

Um einen schnellen Überblick über die möglichen Parameterbereiche und die Grenzkurven zu bekommen, wird zuerst der Einheitskreis mit

Hilfe der Gln.(4.3.48) und (4.3.51) transformiert. Für den lückenden Betriebsfall entsteht das im Bild 4.3.12 hervorgehobene Gebiet. Die Grenze bei $\alpha = -1$ ist mit L_1 und die bei $\alpha = 1$ mit R_1 bezeichnet. Der Bereich wird nach rechts durch die komplexe Grenze K_1 abgeschlossen.

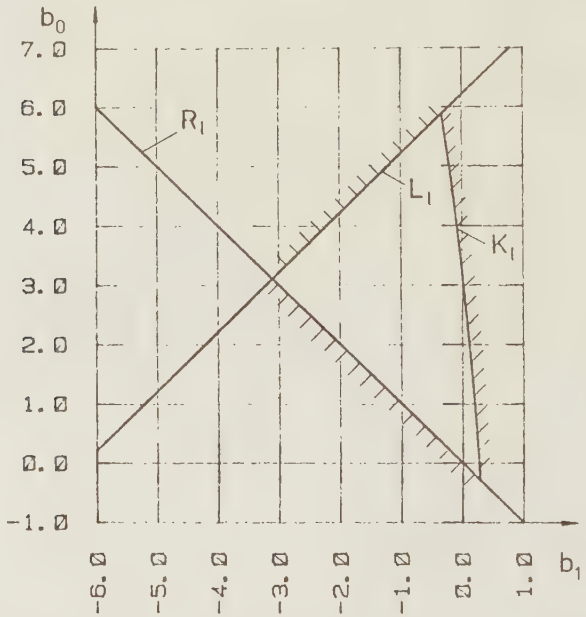


Bild 4.3.12. Reglerparameterbereich für den lückenden Betriebsfall ($\alpha_o = 0$, $r_o = 1$)

Für den nichtlückenden Fall ist mit Hilfe von Bild 4.3.13 nicht auf Anhieb der mögliche Reglerparameterbereich abzugrenzen, da die komplexe Grenze K, beginnend bei L_n, die Gerade R_n zweifach schneidet. Entscheidend ist jedoch die relative Lage der Gebiete im lückenden und nichtlückenden Fall zueinander.

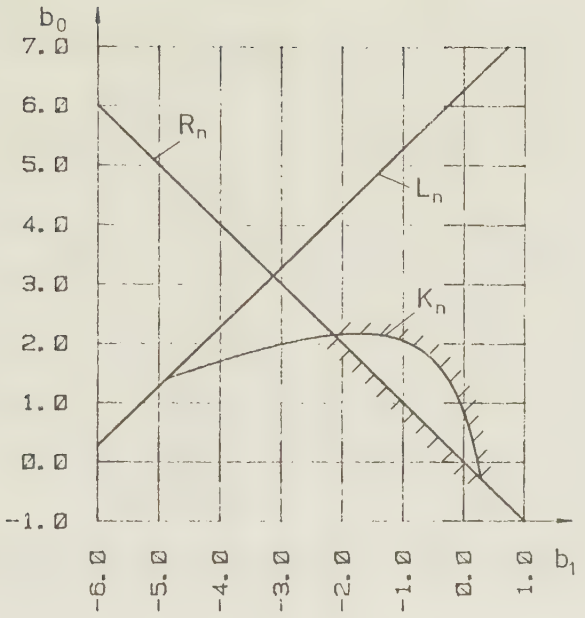


Bild 4.3.13. Reglerparameterbereich für den nichtlückenden Betriebsfall ($\alpha_o = 0$, $r_o = 1$)

Hier ergibt eine eingehende Untersuchung der Lage der Nullstellen des charakteristischen Polynoms in Abhängigkeit der Reglerparameter, daß die Wahl von b_o und b_1 aus dem gekennzeichneten Gebiet im Bild 4.3.14 möglich ist, wobei das Gebiet begrenzt wird durch $R_{1/n}$ und K_n.

Zu Anfang ist ja bereits bemerkt worden, daß diese Überlegungen für $\alpha_o = 0$ und $r_o = 1$ nur dazu dienen, einen Überblick über die möglichen Reglerparameter zu bekommen. Verkleinert man das Vorgabegebiet im z-Bereich, so wird hiermit sicherlich auch der mögliche Reglerparameterbereich eingeschränkt. Bei der weiteren grafischen Analyse wurde der Einfluß von α_o und r_o auf die Form und die Größe des Reglerparametergebietes untersucht. Hier hat sich gezeigt, daß insbesondere für den Fall $\alpha_o = 0$ und $r_o = 0.7$ ein Gebiet entsteht,

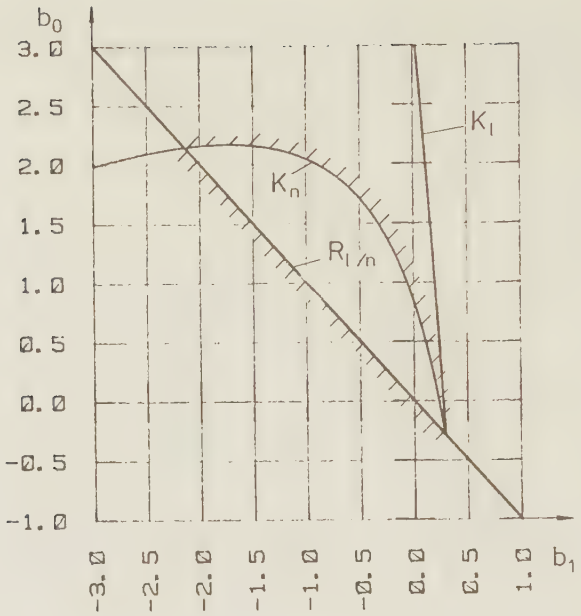


Bild 4.3.14. Reglerparameterbereich für beide Betreibsfälle ($\zeta_o = 0$, $r_o = 1$)

das für die später durchzuführende Festlegung der Reglerparameter unter Berücksichtigung von Stellgrößenbegrenzung und Störverhalten genügend Entwurfsspielraum enthält. Würde man den Regelkreis nur unter Berücksichtigung des lückenden Betriebsfalls entwerfen, was selbstverständlich vom antriebstechnischen Gesichtspunkt sinnlos wäre, so stünde das im Bild 4.3.15 dargestellte Gebiet zur Verfügung.

Dieses wird aber wesentlich eingeschränkt durch den nichtlückenden Betriebsfall, wie man dem Bild 4.3.16 entnehmen kann.

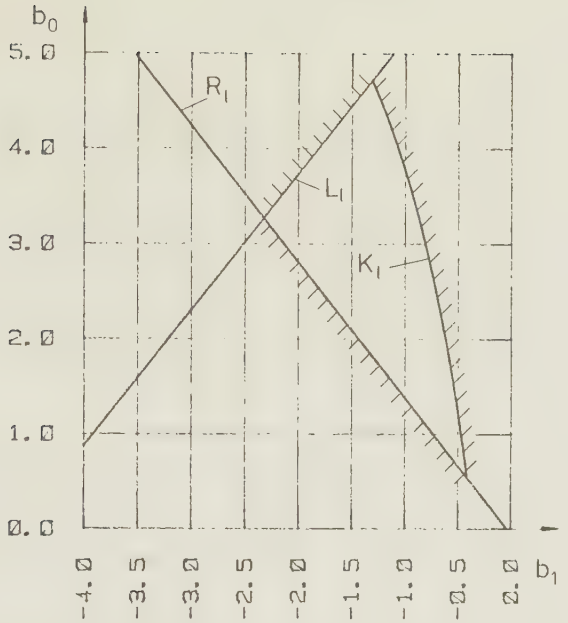


Bild 4.3.15. Reglerparameterbereich für den lückenden Betriebsfall ($\alpha_o = 0$, $r_o = 0.7$)

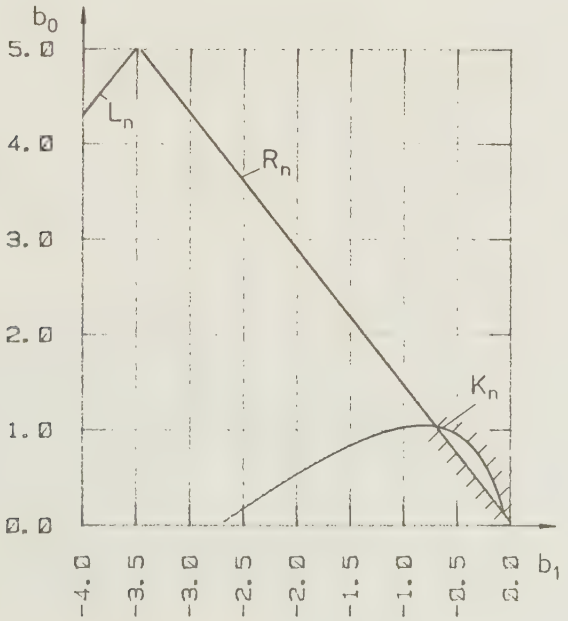


Bild 4.3.16. Reglerparameterbereich für den nichtlückenden Betriebsfall ($\alpha_o = 0$, $r_o = 0.7$)

Insgesamt entsteht als Schnittmenge beider Gebiete das Innere des im Bild 4.3.17 außen schraffierten Bereichs.

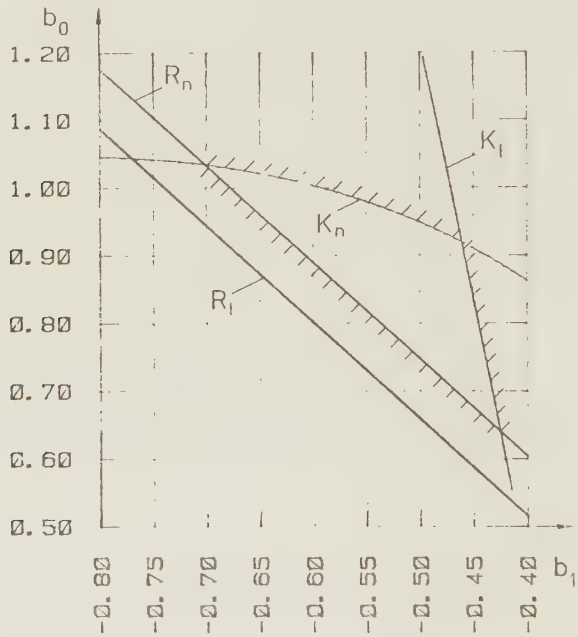


Bild 4.3.17. Reglerparameterbereich für beide Betriebsfälle ($\alpha_o = 0$, $r_o = 0.7$)

Mit der Ermittlung dieses Gebietes sind zwar die Variationsbereiche für die Reglereinstellung gegeben, jedoch müssen zur eigentlichen Festlegung der Reglerkoeffizienten weitere Entwurfskriterien herangezogen werden. Als das wichtigste Kriterium wird hier das Störverhalten bei Laständerung zugrundegelegt. Hierzu werden aus dem möglichen Variationsbereich der Reglerparameter, verteilt über das im Bild 4.3.17 dargestellte Gebiet, Paare von Reglerparametern (b_o, b_1) entnommen und mit diesen Werten simulativ das Störverhalten überprüft. Dies ergibt zwar für den Fall $b_o = 0.73$ und $b_1 = -0.45$, bei Vergleich mit anderen Reglereinstellungen, ein gutes Störver-

halten (siehe Bild 4.3.18), jedoch liegt dieses Wertepaar nahe der unteren Grenze des im Bild 4.3.17 gezeigten Gebietes. Für eine etwaige Reglerfeineinstellung "vor Ort" bleibt dann nur geringer Spielraum. Unter Berücksichtigung dieses Sachverhaltes wird oberhalb des angegebenen Punktes das Wertepaar $b_o = 0.8$ und $b_1 = -0.45$ ausgewählt. Das entsprechende Störverhalten ist im Bild 4.3.19 dokomentiert und unterscheidet sich vom vorhergehenden Fall nur dadurch, daß die Ausregelzeit um ca. 100 msec erhöht wird.

Für eine weitere Beurteilung der Regelgröße wird das Führungsverhalten bei einer Sollwertänderung der Drehzahl untersucht. Hier zeigt das Übergangsverhalten für den nichtlückenden Betriebsfall (Bild 4.3.20) ein nicht akzeptables Überschwingen von ca. 40 %. Im nichtlückenden Fall gilt für die Führungsübertragungsfunktion

$$\frac{Y_n(z)}{W(z)} = \frac{b_o d_o (z + \frac{b_1}{b_o})(z^2 + \frac{d_1}{d_o} z + \frac{d_2}{d_o})}{P_n(z)}$$

mit

$$P_n(z) = p_{on} + p_{1n} z + p_{2n} z^2 + p_{3n} z^3 + z^4$$

und

$$p_{on} = b_1 d_2,$$

$$p_{1n} = b_o d_2 + b_1 d_1 - c_2,$$

$$p_{2n} = c_2 - c_1 + b_o d_1 + b_1 d_o,$$

$$p_{3n} = c_1 - 1 + b_o d_o .$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind nach numerischer Auswertung gegeben durch

$$z_1 = -0.0016$$

$$z_2 = 0.5603$$

$$z_{3/4} = 0.1345 \pm j0.6248 .$$

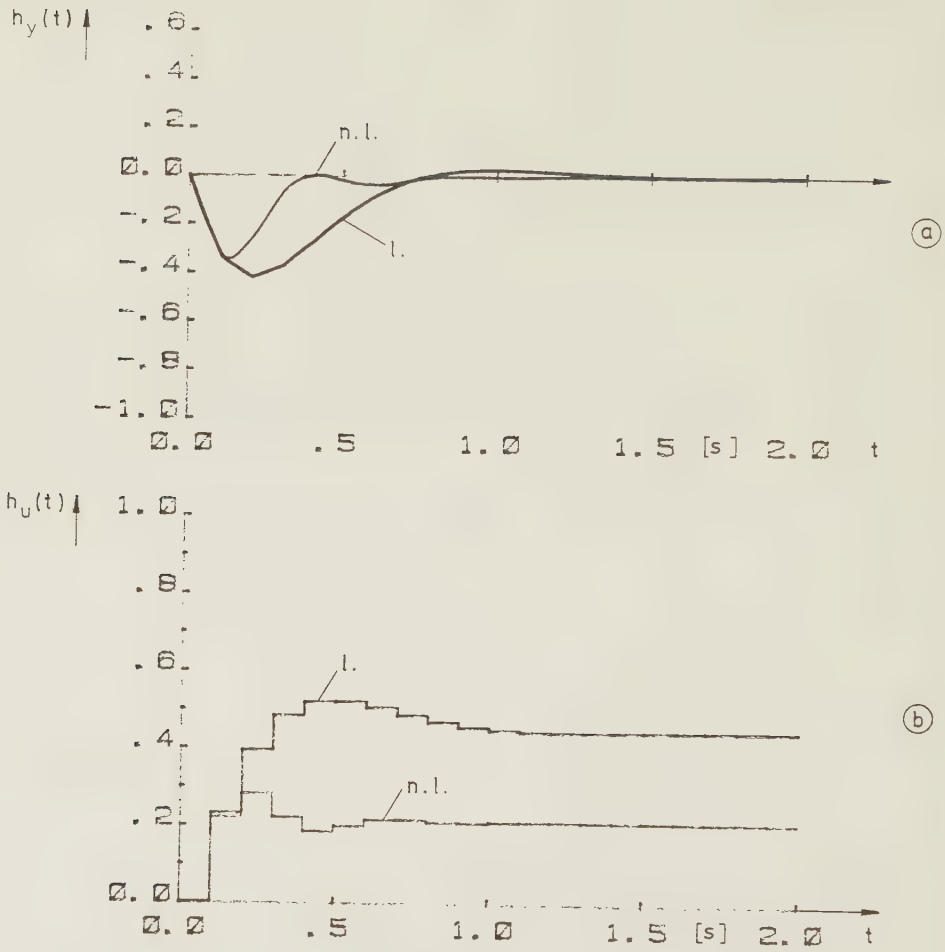


Bild 4.3.18. Übergangsverhalten für den nichtlückenden (n.l.) und lückenden (l.) Betriebsfall bei Laständerungen
(a) Regelgröße $h_y(t)$
(b) Stellgröße $h_u(t)$
für $M_L^* = s(t)$, $b_1 = -0.45$ und $b_o = 0.73$

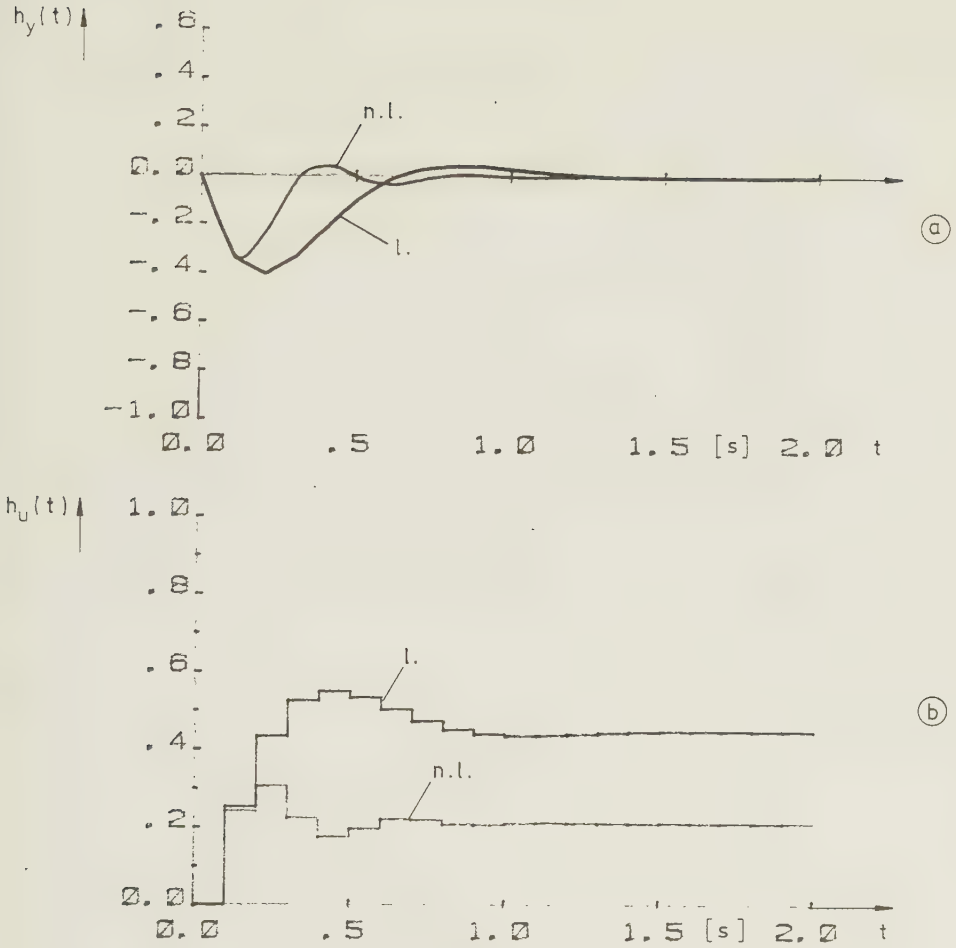


Bild 4.3.19. Übergangsverhalten für den nichtlückenden (n.l.) und lückenden (l.) Betriebsfall bei Laständerungen
(a) Regelgröße $h_y(t)$
(b) Stellgröße $h_u(t)$
für $M_L^* = s(t)$, $b_1 = -0.45$ und $b_o = 0.8$

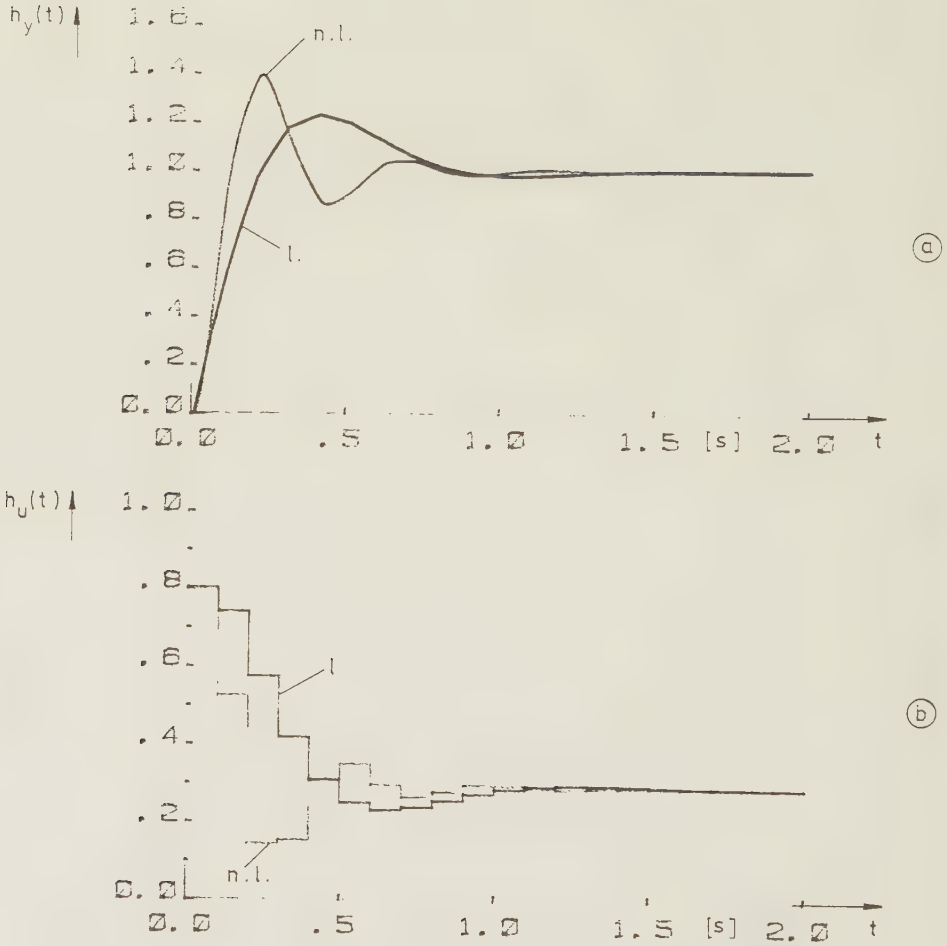


Bild 4.3.20. Übergangsverhalten für den nichtlückenden (n.l.) und lückenden (l.) Betriebsfall bei Drehzahländerungen
(a) Regelgröße $h_y(t)$
(b) Stellgröße $h_u(t)$
für $w(t) = s(t)$, $b_1 = -0.45$ und $b_o = 0.8$ ohne Vorfilter

Für das große Überschwingen zeichnet also im wesentlichen das konjugiert komplexe Polpaar $z_{3/4}$ verantwortlich. Deshalb wird ein Vorfilter der Form

$$G_V(z) = K \frac{(z-z_3)(z-z_4)}{(z+\frac{b_1}{b_o})(z+\alpha)} = K \frac{1+\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2 z^{-2}}{1+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}}$$

mit $\alpha = 0.1$ und

$$K = \frac{1+\beta_1+\beta_2}{1+\alpha_1+\alpha_2} = 0.4223 ,$$

also

$$G_V(z) = 0.4223 \frac{1-0.269\ z^{-1}+0.40846\ z^{-2}}{1-0.4625\ z^{-1}-0.05625\ z^{-2}}$$

vorgesehen. Hierdurch wird zwar die Anregelzeit für beide Betriebsfälle erhöht, jedoch zeigt dieser Kompromiß insgesamt sowohl für das Störverhalten als auch für das Führungsverhalten gutes Regelverhalten bei relativ kleiner Stellgrößendynamik (Bild 4.3.21).

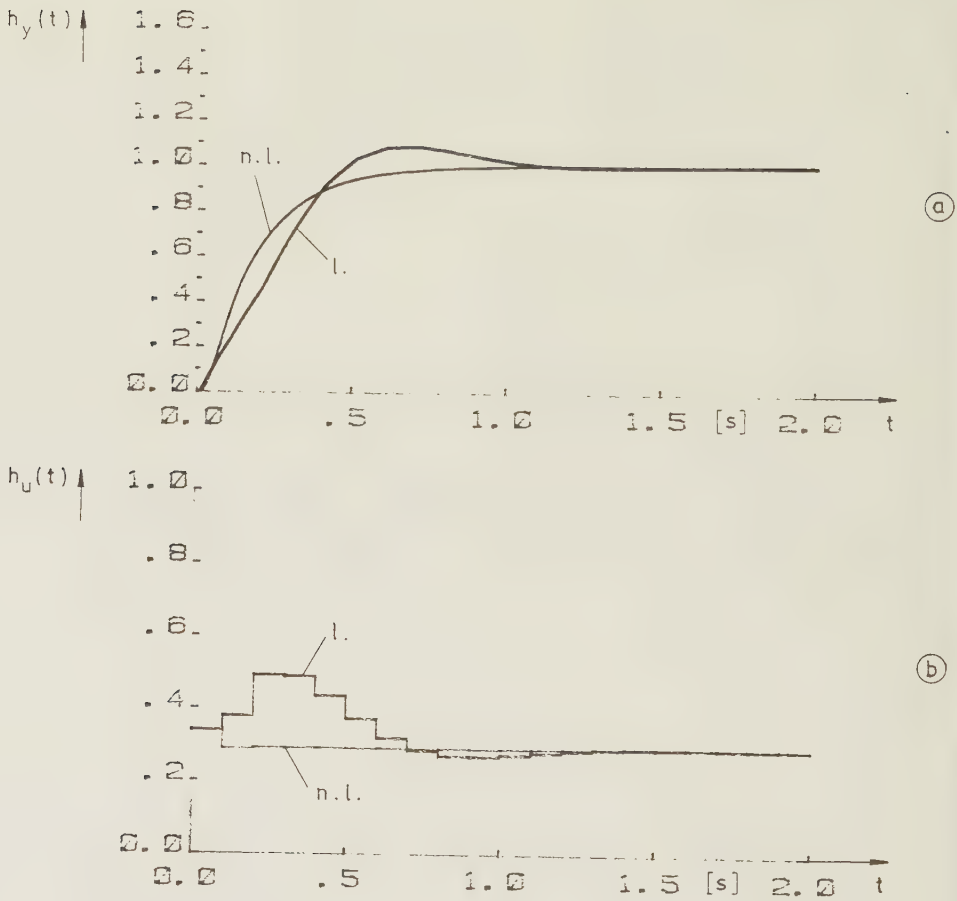


Bild 4.3.21. Übergangsverhalten für den nichtlückenden (n.l.) und lückenden (l.) Betriebsfall bei Drehzahländerung
(a) Regelgröße $h_y(t)$
(b) Stellgröße $h_u(t)$
für $w(t) = s(t)$, $b_1 = -0.45$ und $b_o = 0.8$ mit Vorfilter

5. Die Auslegung von Regelkreisen mit Hilfe von Strecken-Approximationen

Das Problem der Auslegung von Regelkreisen bei unbestimmten Strekkenparametern ist in den vorherigen Abschnitten so gelöst worden, daß die Struktur und damit die Ordnung der Strecke einschließlich der Nullstellen gegeben ist und für die Streckenparameter Variationsbereiche oder verschiedene Betriebspunkte angegeben werden.

Die Syntheseaufgabe bei unbestimmten Streckenparametern läßt sich ebenso in folgende Fragestellung umformulieren: Welche Minimalkenntnisse über Struktur und Koeffizienten der Regelstrecke müssen vorliegen, damit der Regelkreis stabilisiert werden kann und die Regelgrößen die gestellten Anforderungen erfüllen? Diese erweiterte Fragestellung schließt ebenfalls Strukturunbestimmtheiten ein. Im folgenden wird versucht, ergänzend zu den bisherigen Ausführungen einige prinzipielle Lösungsansätze kritisch zu beurteilen und deren Ergebnisse zu vergleichen.

5.1 Reglerentwürfe mit Hilfe von "High-Gain" und "Low-Gain"-Technik

Ausgangspunkt ist hier wiederum eine Beschreibung der Regelstrecke in Form eines kontinuierlichen, linearen und zeitinvarianten Modells

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t). \qquad (5.1.1)$$

Liegen über die Strecke nur einige Informationen, wie z. B.

- Stabilität,
- Minimalphasigkeit,
- Kenntnisse über das statische Verhalten und Anstiegszeiten

vor, so stellt sich das Problem des Regleransatzes. Wird z. B. eine Regelung mit Ausgangsrückführung und PI-Reglern angesetzt, so bringt die theoretische Lösung des Problems zwar keine exakte numerische Form des Reglers, es lassen sich hierfür aber Klassen von Reglern und Parameterbereiche angeben, in denen ein brauchbarer Regler zu finden ist. Dies gilt sowohl für den Eingrößen- als auch für den Mehrgrößenfall. In vielen Anwendungsfällen liegt z. B. ein geeigneter Regler in der Form

$$\underline{G}_R(s) = k[\underline{K}_1 + \frac{1}{s}\,\underline{K}_2]$$

mit

$$k_1 < k < k_2 \qquad (5.1.2)$$

vor. $\underline{K}_1$ und $\underline{K}_2$ sind reelle Matrizen, während die Kreisverstärkung k nur durch systematisches Suchen (On-Line-Tuning) gefunden werden kann. Die Lösungsmethoden, die kleine Reglerverstärkungen k zulassen, setzen voraus, daß die unbekannte Regelstrecke stabil ist. Die Verstärkung k_1 wird so gewählt, daß

$$k_1 < \varepsilon \qquad (5.1.3)$$

unterhalb einer oberen Schranke ε bleibt. Für stabile Strecken ohne Übertragungsnullstellen bei $s = 0$ mit gleicher Anzahl von Eingangs- und Ausgangsgrößen können die Matrizen $\underline{K}_1$ und $\underline{K}_2$ so gewählt werden, daß

$$\underline{K}_1 = \underline{G}^{-1}(0)$$

und

$$\underline{K}_2 = c\,\underline{G}^{-1}(0),\ c \geq 0 \qquad (5.1.4)$$

gesetzt wird. Voraussetzung hierfür ist, daß die Inverse existiert. Die notwendigen Kenntnisse über die Regelstrecke beschränken sich hier auf das statische Verhalten. Dies ist etwa im Beispiel aus [8] dadurch möglich, daß für die Streckenübertragungsmatrix

$$\underline{G}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} -47s+2 & 56s \\ -42s & 50s+2 \end{bmatrix}$$

die Reglerübertragungsmatrix

$$\underline{G}_R(s) = k\, \underline{G}^{-1}(0) = k\, \underline{I}$$

mit $k > -1$ gewählt wird. Unter Berücksichtigung von Parameteränderungen der Regelstrecke kann der Bereich für die Reglerverstärkung nach Gl.(5.1.3) gewählt werden.

Ist die Strecke minimalphasig und besitzt die gleiche Anzahl von Stell- und Ausgangsgrößen, so läßt sich häufig ein Regler nach Gl. (5.1.2) finden, der für große Werte von k_2 das System stabilisiert. Dies ist jedoch wegen der immer vorhandenen technischen Begrenzung der Stellgrößen nur in einigen Fällen möglich. Der Ansatz nach Gl.(5.1.2) eignet sich jedoch auch bei nicht zu großer Anzahl der Parameter, in $\underline{K}_1$ und $\underline{K}_2$ mit Hilfe der charakteristischen Gleichung

$$\det(\underline{I} + \underline{G}_R\, \underline{G}) = 0$$

Stabilitätsgebiete in der s- oder z-Ebene vorzugeben und mit der im Kapitel 4 beschriebenen Transformation auf die Reglerparameter abzubilden.

5.1.1 Reglerentwurf für Streckenapproximationen niedriger Ordnung

Die in [25] vorgestellte Entwurfsmethode verlangt folgende Definition der Nullstellen von Mehrgrößenregelstrecken [24]. Demnach ist das Nullstellen-Polynom definiert als

$$Z(s) = \det(s\underline{I}_n - \underline{A})\, \det\underline{G}(s) = Z_o(s)\, \det \begin{bmatrix} (s\underline{I}_n - \underline{A}) & -\underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}, \qquad (5.1.5)$$

wobei $Z_o(s) = \det(s\underline{I}_n - \underline{A})$ das charakteristische Polynom der Regelstrecke ist. Für $Z(s) = 0$ ist $\det \underline{G}(s) = 0$. Im Fall von $Z(s) = \text{const} \neq 0$ besitzt das System keine Nullstellen. Hat das Polynom $Z(s)$ eine oder mehrere Wurzeln s_i mit $\text{Re}(s_i) > 0$, so wird es als nichtminimalphasig bezeichnet, im anderen Fall als minimalphasig. Mit

$$\underline{G}(s) = \underline{C}(s\underline{I}_n - \underline{A})^{-1}\ \underline{B} + \underline{D} = \frac{\underline{C}\ \text{adj}\ (s\underline{I}_n - \underline{A})\ \underline{B} + Z_o(s)\ \underline{D}}{Z_o(s)} = \frac{\underline{M}(s)}{Z_o(s)} \tag{5.1.6}$$

und

$$\det \underline{M} = Z_o^m(s)\ \det \underline{G}(s) = Z_o^{m-1}(s)\ Z(s) \tag{5.1.7}$$

folgt für die Inverse von $\underline{G}(s)$

$$\underline{G}^{-1}(s) = \frac{\text{adj}\ \underline{M}(s)}{Z_o^{m-2}(s)\ Z(s)}, \tag{5.1.8}$$

wobei m die Anzahl der Ein- bzw. Ausgänge der Mehrgrößenregelstrecke darstellt. Für den Fall $m = 2$ ist im Nenner von Gl.(5.1.8) $Z_o(s)$ nicht mehr vorhanden. Für diesen Fall kann Gl.(5.1.8) dargestellt werden als

$$\underline{G}^{-1}(s) = \sum_{j=0}^{k} \underline{A}_{k-j}\ s^j + \frac{\underline{N}(s)}{Z(s)}, \tag{5.1.9}$$

wobei die reellen Matrizen $\underline{A}_o, \ldots, \underline{A}_k$ für $k \geq 0$ ungleich Null sind, $\underline{N}(s)$ eine Polynommatrix ist und $\lim_{s\to\infty} \frac{\underline{N}(s)}{Z(s)} = 0$ gilt.

Ein für Approximationsverfahren besser geeigneter Ansatz wird in [25] für minimalphasige Systeme mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen gemacht. Die Inverse der Streckenübertragungsmatrix läßt sich darstellen als

$$\underline{G}^{-1}(s) = s\ \underline{A}_o + \underline{A}_1 + \underline{A}_o\ \underline{H}(s) \tag{5.1.10}$$

mit den Eigenschaften, daß $\underline{A}_o \neq \underline{0}$, $\underline{H}(s)$ stabil und der Grenzwert $\lim_{s\to\infty} \underline{H}(s)$ beschränkt ist sowie $\underline{H}(0) = \underline{0}$ gilt.

Betrachtet werden im folgenden Regelstrecken, für die $\underline{D} = \underline{O}$ gilt. Zur Bestimmung der reellen Matrizen $\underline{A}_o$, $\underline{A}_1$ wird für

$$\underline{G}(s) = \underline{C}(s\underline{I}_n - \underline{A})^{-1}\ \underline{B} \tag{5.1.11}$$

die Reihenentwicklung

$$(s\underline{I}_n - \underline{A})^{-1} = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{s^i}\ \underline{A}^i \tag{5.1.12}$$

angesetzt. Die Gln.(5.1.11) und (5.1.12) liefern den Grenzwert

$$\lim_{s\to\infty} s\ \underline{G}(s) = \underline{C}\ \underline{B}\ . \tag{5.1.13}$$

Das Ziel dieser Überlegungen ist es, ein approximiertes Modell der Form

$$\underline{G}_M^{-1}(s) = s\ \underline{A}_o + \underline{A}_1 \tag{5.1.14}$$

von Gl.(5.1.11) bzw. Gl.(5.1.10) zu konstruieren. Für diesen Ansatz muß erfüllt sein

$$\begin{aligned}\underline{G}(s)\ \underline{G}^{-1}(s) &= \underline{C}(s\underline{I}_n - \underline{A})^{-1}\ \underline{B}(s\underline{A}_o + \underline{A}_1 + \underline{A}_o\ \underline{H}(s)) \\ &= \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^k}\ \underline{C}\ \underline{A}^k\ \underline{B}(s\ \underline{A}_o + \underline{A}_1 + \underline{A}_o\ \underline{H}(s)) \\ &= \underline{I}_m\ .\end{aligned}$$

Nach einfacher Umformung läßt sich dieses Produkt schreiben als

$$\underline{G}(s)\ \underline{G}^{-1}(s) = \underline{A}_o\ \underline{C}\ \underline{B} + \underline{S}_2(s) + \underline{S}_3(s) = \underline{I}_m \tag{5.1.15}$$

mit

$$\underline{S}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s^k}\ [\underline{A}_o\ \underline{C}\ \underline{A}^k\ \underline{B} + \underline{A}_1\ \underline{C}\ \underline{A}^{k-1}\ \underline{B}] \tag{5.1.15a}$$

und

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s^k}\ \underline{A}_o\ \underline{H}(s)\ \underline{C}\ \underline{A}^{k-1}\ \underline{B}\ . \tag{5.1.15b}$$

Unter der Bedingung, daß $\underline{C}\ \underline{B}$ eine reguläre quadratische Matrix ist, läßt sich Gl.(5.1.15) erfüllen durch

$$\underline{A}_o = (\underline{C}\ \underline{B})^{-1}. \tag{5.1.16}$$

Für die Terme $\underline{S}_2(s)$ und $\underline{S}_3(s)$ lassen sich im Sinne der in Gl.(5.1.14) geforderten Approximation zwei wesentliche Fälle unterscheiden. Im ersten Fall ist in Gl.(5.1.15a)

$$\underline{A}_o\ \underline{C}\ \underline{A}^k\ \underline{B} + \underline{A}_1\ \underline{C}\ \underline{A}^{k-1}\ \underline{B} = \underline{O}$$

und $\lim\limits_{s\to\infty} \underline{S}_3(s) = \underline{O}$, wenn man die für $\underline{H}(s)$ angegebenen Bedingungen berücksichtigt. Daraus folgt

$$\underline{A}_1 = -\underline{A}_o\ \underline{C}\ \underline{A}^k\ \underline{B}(\underline{C}\ \underline{A}^{k-1}\ \underline{B})^{-1}\ \forall\ k$$

und stellt für $k = 1$ in der Form von

$$\underline{A}_1 = -\underline{A}_o\ \underline{C}\ \underline{A}\ \underline{B}(\underline{C}\ \underline{B})^{-1} \tag{5.1.17}$$

eine Approximation im unteren Frequenzbereich dar, was leicht durch

$$\underline{A}_1 = \lim_{s\to o} \underline{G}^{-1}(s) \tag{5.1.18}$$

aus Gl.(5.1.9) verifiziert werden kann. Im zweiten Fall ist

$$\underline{S}_2(s) + \underline{S}_3(s) = \underline{O}$$

und liefert

$$\underline{A}_1 = -\underline{A}_o\ \underline{C}\ \underline{A}^k\ \underline{B}(\underline{C}\ \underline{A}^{k-1}\ \underline{B})^{-1} - \underline{A}_o\ \underline{H}(s),$$

welche unter Berücksichtigung der Bedingungen für $\underline{H}(s)$ wiederum Gl.(5.1.17) als Ergebnis liefert. Die bisher gemachten Ansätze haben als Ergebnis eine Approximation für den oberen Frequenzbereich (Gl.(5.1.13)) und für den unteren Frequenzbereich mit Hilfe

von Gl.(5.1.18). Gl.(5.1.14) gilt exakt für ein vollständig steuerbares und beobachtbares Mehrgrößensystem mit m Ein- und Ausgängen, wenn $n = m$, $\det(\underline{C}\,\underline{B}) \neq 0$ und $\underline{D} = \underline{0}$ ist. Im Fall einer Approximation ist $\underline{A}_0$ nach Gl.(5.1.16) für stabile Strecken meßbar. Bei instabilen Strecken sind nur Näherungen für $\underline{A}_0$, $\underline{A}_1$ in Form von $\underline{A}_0'$ und $\underline{A}_1'$ angebbar. Wird nun ein Regler

$$\underline{G}_R(s) = \underline{A}_0' \, \underline{\lambda}(s) - \underline{A}_1' \tag{5.1.19}$$

mit

$$\underline{\lambda}(s) = \begin{bmatrix} k_1+c_1+\frac{k_1c_1}{s} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & k_m+c_m+\frac{k_mc_m}{s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(s+k_1)(s+c_1)}{s} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \frac{(s+k_m)(s+c_m)}{s} \end{bmatrix} - s\underline{I}_m$$

$$= \underline{\lambda}_0(s) - s\underline{I}_m$$

angesetzt [25], so gilt für das ideale Führungsübertragungsverhalten mit approximierter Streckenübertragungsmatrix $\underline{G}_M^{-1}(s) = s\underline{A}_0' + \underline{A}_1'$

$$\begin{aligned} \underline{G}_W(s) &= [\underline{I} + \underline{G}_M(s) \, \underline{G}_R(s)]^{-1} \, \underline{G}_M(s) \, \underline{G}_R(s) \\ &= \underline{\lambda}_0^{-1}(s) \, (\underline{\lambda}(s) - \underline{A}_0'^{-1} \, \underline{A}_1'). \end{aligned} \tag{5.1.20}$$

Diese hat somit die Pole $-k_i$ und $-c_i$ für $i = 1,\ldots,m$, weshalb $k_i > 0$ und $c_i > 0$ gefordert werden muß. Neben diesen Bedingungen müssen zwei weitere berücksichtigt werden, die sicherstellen, daß ein $0 \leq k^* \leq k$ existiert, das die unbekannte Mehrgrößen-Regelstrecke stabilisiert.

Hierzu ist notwendig, daß

$$\max \sum_{j=1}^{m} \left| \underline{A}_o'^{-1} (\underline{A}_o' - \underline{A}_o)_{i,j} \right| < 1 \qquad (5.1.21)$$

und

$$k = \min k_i \geq k^* \text{ für } i = 1, \ldots, m \qquad (5.1.22)$$

erfüllt ist. Hieraus ist ersichtlich, daß für $\underline{A}_1'$ keine Bedingungen existieren. Aus diesem Grund ist es naheliegend, in Gl.(5.1.19) den Term $\underline{A}_1'$ zu vernachlässigen. Dies hat jedoch zur Folge, daß an Stelle der Übertragungsmatrix aus Gl.(5.1.20) die Übertragungsmatrix

$$\underline{G}_W(s) = (\underline{\lambda}_o(s) + \underline{A}_o'^{-1} \underline{A}_1')^{-1} \underline{\lambda}(s) \qquad (5.1.23)$$

erzeugt wird. Gl.(5.1.22) kann zwar hierbei ebenfalls erfüllt werden, jedoch ist die Festlegung der Pole der Einzelübertragungsfunktionen im Sinne einer Vorgabe von k_j und c_j für $j = 1, \ldots, m$ nicht mehr möglich, da die Elemente der Matrix $\underline{A}_o'^{-1} \underline{A}_1'$ in die Nennerpolynome der Einzelübertragungsfunktionen eingehen. Dies wird besonders deutlich an einem Beispiel, für das Gl.(5.1.14) exakt gilt. Betrachtet wird das vollständig steuerbare und beobachtbare Mehrgrößensystem

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

mit

$$\underline{A} = \underline{B} = \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } m = n = 2 .$$

Hierfür gilt

$$\underline{G}^{-1}(s) = s\,\underline{A}_o + \underline{A}_1 = s(\underline{C}\,\underline{B})^{-1} - (\underline{C}\,\underline{B})^{-1}\,\underline{C}\,\underline{A}\,\underline{B}(\underline{C}\,\underline{B})^{-1}$$

$$= s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung von $\underline{A}_1$ in der Reglerübertragungsmatrix ergibt Gl.(5.1.20) die Führungsübertragungsmatrix

$$\underline{G}_W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{(k_1+c_1+1)s + k_1c_1}{(s+k_1)(s+c_1)} & 0 \\ \dfrac{s}{(s+k_2)(s+c_2)} & \dfrac{(k_2+c_2+1)s + k_2c_2}{(s+k_2)(s+c_2)} \end{bmatrix}.$$

Sie enthält somit nur die Pole von $-k_i$ und $-c_i$ für $i = 1, \ldots, m$ in den Einzelübertragungsfunktionen. Die Anwendung von Gl.(5.1.23) hat als Ergebnis

$$\underline{G}_W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{(k_1+c_1)s + k_1c_1}{(s+k_1)(s+c_1)-s} & 0 \\ \dfrac{s((k_1+c_1)s + k_1c_1)}{[(s+k_1)(s+c_1)-s][(s+k_2)(s+c_2)-s]} & \dfrac{s(k_2+c_2) + k_2c_2}{(s+k_2)(s+c_2)-s} \end{bmatrix}$$

und zeigt deutlich, daß die Pole nur für den Fall $k_i + c_i \gg 1$ mit den vorgegebenen übereinstimmen. Diese Bedingung legt nahe, den Stellaufwand für die Reglerübertragungsmatrix nach Gl.(5.1.19) und bei Vernachlässigung von $\underline{A}_1'$ zu untersuchen. Für einen Führungsgrössenvektor $\underline{W}(s)$ ist der Vektor der Stellgröße gegeben durch

$$\underline{U}(s) = \underline{G}^{-1}(s)\,[\underline{G}^{-1}(s) + \underline{G}_R(s)]^{-1}\,\underline{G}_R(s)\,\underline{W}(s) = \underline{G}_{UW}(s)\,\underline{W}(s)\,. \tag{5.1.24}$$

Durch Einsetzen des Approximationsansatzes $\underline{G}^{-1}(s) = s\underline{A}_o' + \underline{A}_1'$ und der vollständigen Reglerübertragungsmatrix $\underline{G}_R(s) = \underline{A}_o'\,\underline{\lambda}(s) - \underline{A}_1'$ ist

$$\underline{G}_{UW}(s) = \underline{A}'_o(s\underline{I}_m + \underline{A}'^{-1}_o \underline{A}'_1)\ \underline{\lambda}^{-1}_o(\underline{\lambda} - \underline{A}'^{-1}_o \underline{A}'_1). \tag{5.1.25}$$

Eine Betrachtung des Grenzwertes

$$\underline{u}(0) = \lim_{t\to o} \underline{u}(t) = \lim_{s\to\infty} s\ \underline{U}(s) \tag{5.1.26}$$

liefert für

$$\underline{W}^T(s) = \frac{1}{s}\ [w_{1o},\ w_{2o},\ \ldots,\ w_{m}] = \frac{1}{s}\ \underline{w}^T_o$$

die Beziehung

$$\underline{u}(0) = (\underline{A}'_o\ \underline{\lambda}_K - \underline{A}'_1)\ \underline{w}^T_o, \tag{5.1.27}$$

wobei die Diagonalmatrix $\underline{\lambda}_K$ die Elemente $k_i + c_i$ für $i = 1, \ldots, m$ enthält. Wird in der Reglerübertragungsmatrix $\underline{A}'_1$ vernachlässigt, gilt

$$\underline{u}(0) = \lim_{s\to\infty} \underline{A}'_o\ \underline{\lambda}_K\ \underline{w}^T_o\,. \tag{5.1.28}$$

Die Gln.(5.1.27) und (5.1.28) zeigen deutlich, daß die Stellgrößendynamik durch die Reglerparameter k_i und c_i bestimmt wird. Die Anwendung dieses Verfahrens ist somit für solche Systeme ausgeschlossen, für die zwar Gl.(5.1.22) erfüllt ist, k^* jedoch nicht realisierbare Stellgrößen liefert. Unter Berücksichtigung dieser Einschränkungen soll die Praktikabilität anhand eines Beispiels untersucht werden. Dies wird hier so durchgeführt, daß als Ausgangspunkt das Modell eines bekannten Mehrgrößensystems [26] gewählt wird. Für $m = 2$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1.17 & 0.634 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.539 & -1.17 & 0.634 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.539 & -1.17 & 0.634 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.539 & -1.17 & 0.634 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.539 & -1.17 & 0.634 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.539 & -1.17 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0.539 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.634 \end{bmatrix}$$

und

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist

$$\underline{A}_o = (\underline{C}\ \underline{B})^{-1} = \begin{bmatrix} 2.57678 & 0 \\ 0 & 1.57728 \end{bmatrix}$$

und

$$\underline{A}_1 = -\underline{A}_o\ \underline{C}\ \underline{A}\ \underline{B}\ \underline{A}_o = \begin{bmatrix} 3.01484 & 0 \\ 0 & 1.84542 \end{bmatrix}.$$

Bei einer Wahl von

$$\underline{A}'_o = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ist Gl.(5.1.21) durch $0.21136 < 1$ erfüllt. Setzt man den Regler unter Vernachlässigung von $\underline{A}'_1$ an, also $\underline{G}_R(s) = \underline{A}'_o\ \underline{\lambda}$, so hat das Verfahren die Konsequenz, daß das Regelverhalten anhand verschiedener Einstellwerte k_i, c_i überprüft werden muß. Da das betrachtete System stabil ist, ist es möglich, beginnend bei kleinen Verstärkungen die Reglerparameter zu variieren. Hierzu wurden die in Tabelle 5.1.1 enthaltenen Werte ausgewählt.

Regler	k_1	c_1	k_2	c_2
1	1	1	1	1
2	0.5	2	0.5	2
3	5	1	5	1
4	2	10	2	10
5	5	5	5	5

Tabelle 5.1.1. Reglereinstellwerte

Die Beurteilung der Regelergebnisse wird anhand der Anregelzeit t_{an}, der Ausregelzeit t_ε für $\varepsilon = 1$ % und der maximalen Überschwingweite Δy vorgenommen. Für die Regelgröße y_1 ergeben sich bei sprungförmiger Führungsgröße $w_1(t) = s(t)$ und $w_2 = 0$ die in Tabelle 5.1.2 dargestellten Daten.

Regler	tan	t_ε	Δy
1	5.25	8.0	1.1 %
2	6.83	5.17	0.6 %
3	1.46	1.0	0.8 %
4	0.26	1.46	2.5 %
5	0.24	1.38	6.0 %

Tabelle 5.1.2. Regelergebnisse für $y_1(t)$

Zu berücksichtigen ist außerdem, daß nach Gl.(5.1.28) die Stellgröße $u_i(0)$ proportional zu $k_i + c_i$ ist. Als weiteres Kriterium bei der Auswahl des Reglers ist das Entkopplungsverhalten zu beurteilen. Da kleine An- und Ausregelzeiten nur auf Kosten großer Stellamplituden zu erreichen sind (Bild 5.1.1), und bei den Reglern 4 und 5 zusätzlich die maximale Überschwingweite Δy weit über der 1 %-Grenze liegt, scheiden die Regler 3 bis 5 für die Anwendung aus. Bei einem Vergleich der restlichen Regler wird deutlich, daß mit Regler 1 eine kleinere Anregelzeit bei kleinerem Stellgrößenniveau möglich ist. Wichtet man diese Eigenschaft stärker als alle anderen, so kann Regler 1 ausgewählt werden. Das Kopplungsverhalten sowie das Störverhalten für sprungförmige Störungen am Eingang und am Ausgang der Regelstrecke sind in den Bildern 5.1.2 bis 5.1.5 dokumentiert.

5.2. Vergleich mit anderen Entwurfsmethoden

Im Kapitel 5.1 ist schon herausgestellt worden, daß für die Regelung nicht vollständig bekannter Regelstrecken die Vorgabe fester Regelstrukturen notwendig ist. Hierzu eignen sich hervorragend Mehrgrößen-I- oder -PI-Regelungen, deren Qualitäten wie Ausregelung sprungförmiger Störungen unabhängig vom Störort, Führungsregelung,

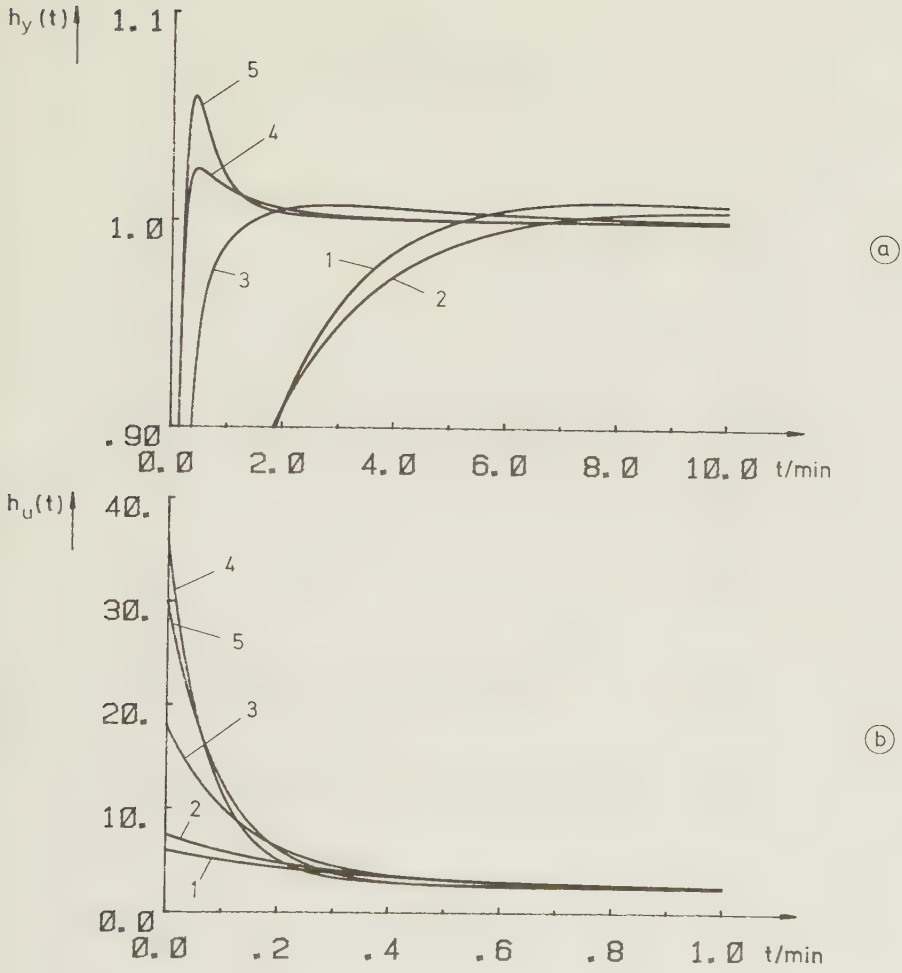


Bild 5.1.1. Übergangsfunktionen bei Anwendung der Regler 1-5 für die Regelstrecke nach Kapitel 5.1.1
(a) Regelgröße $h_{yw}(t)$
(b) Stellgröße $h_{uw}(t)$
für $w_1 = s(t)$ und $w_2 = 0$

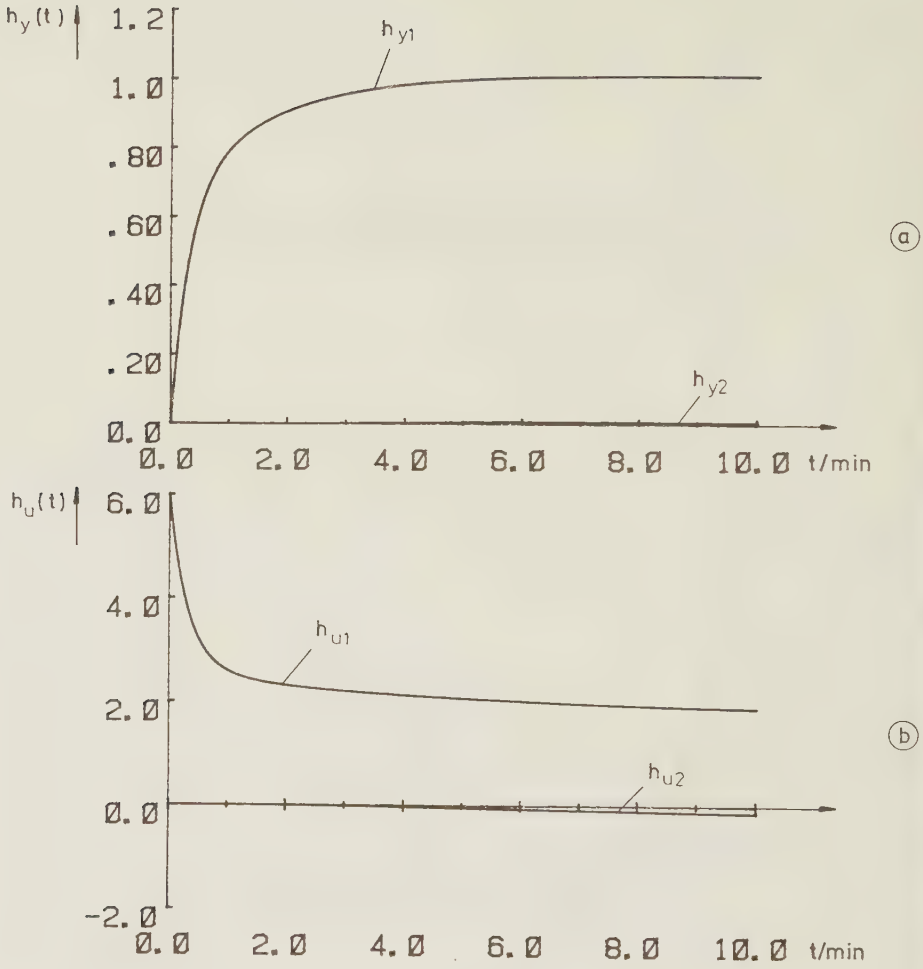


Bild 5.1.2. Übergangsfunktionen bei Anwendung von Regler 1
(a) Regelgröße $h_{yw}(t)$
(b) Stellgröße $h_{uw}(t)$
für $w_1 = s(t)$ und $w_2 = 0$

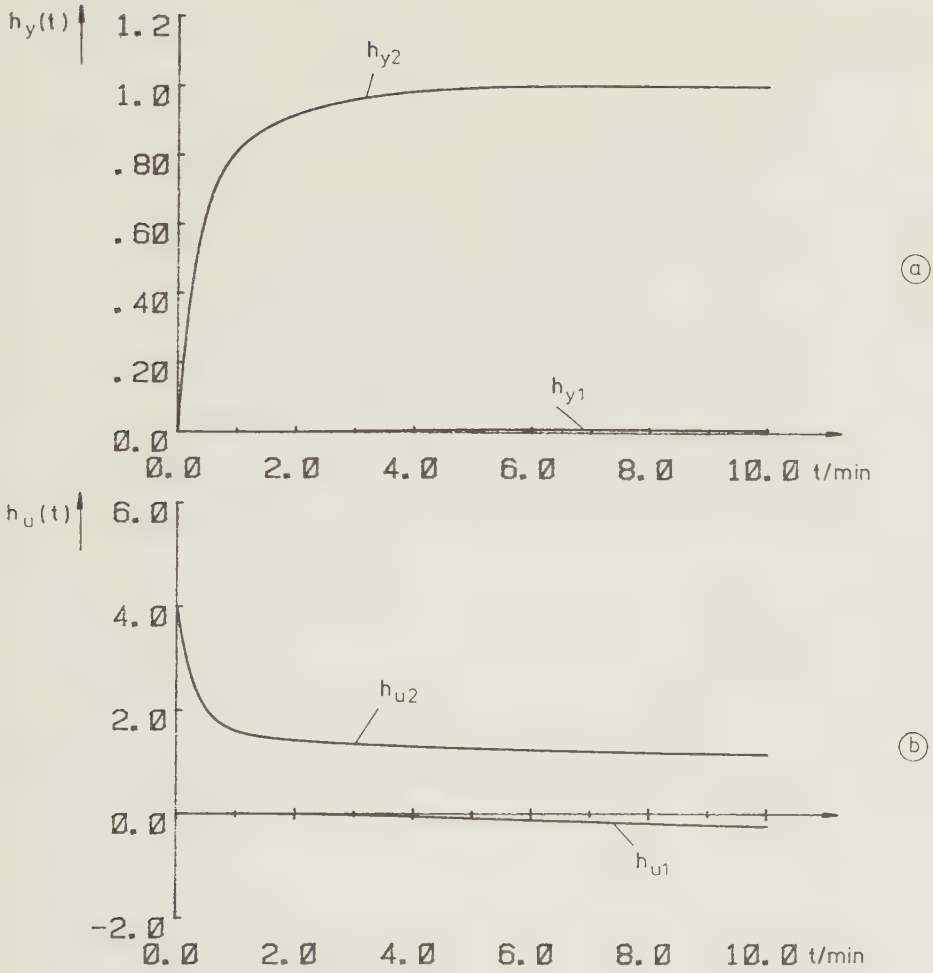


Bild 5.1.3. Übergangsfunktionen bei Anwendung von Regler 1
(a) Regelgröße $h_{yw}(t)$
(b) Stellgröße $h_{uw}(t)$
für $w_1 = 0$ und $w_2 = s(t)$

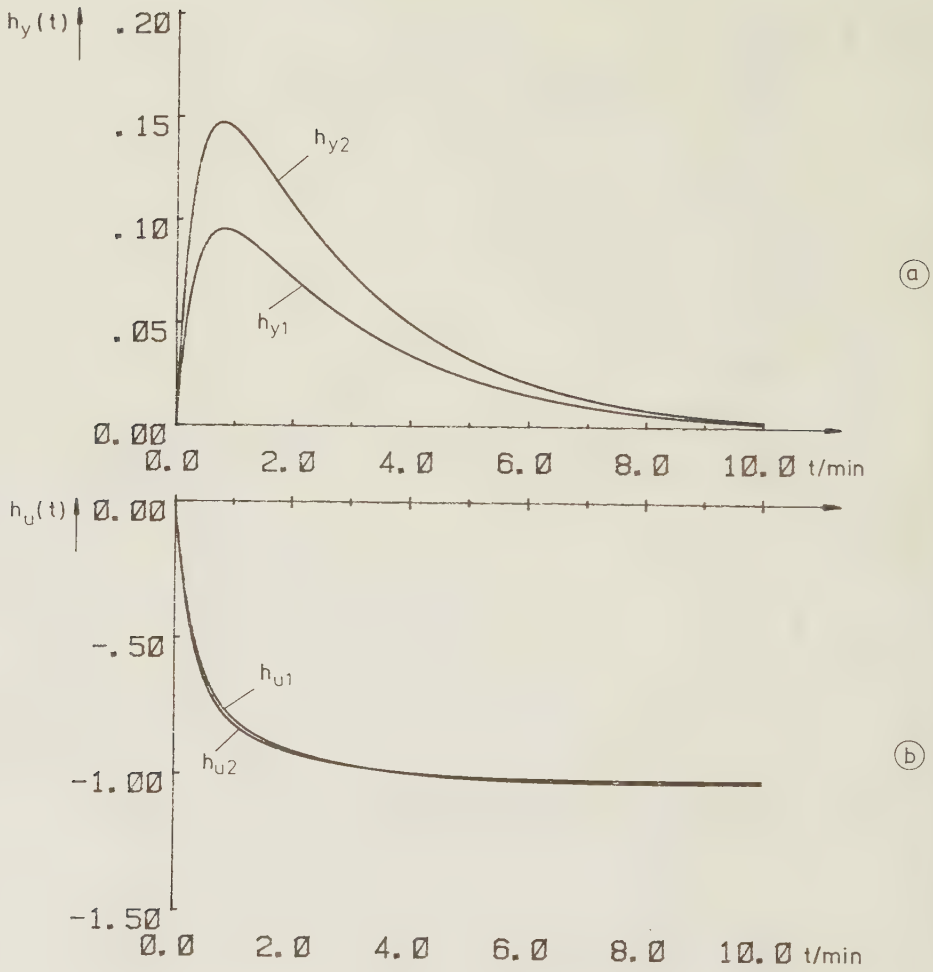


Bild 5.1.4. Übergangsfunktionen bei Anwendung von Regler 1
(a) Regelgröße $h_{yz}(t)$
(b) Stellgröße $h_{uz}(t)$
für Eingangsstörungen $z_{E1} = s(t)$ und $z_{E2} = s(t)$

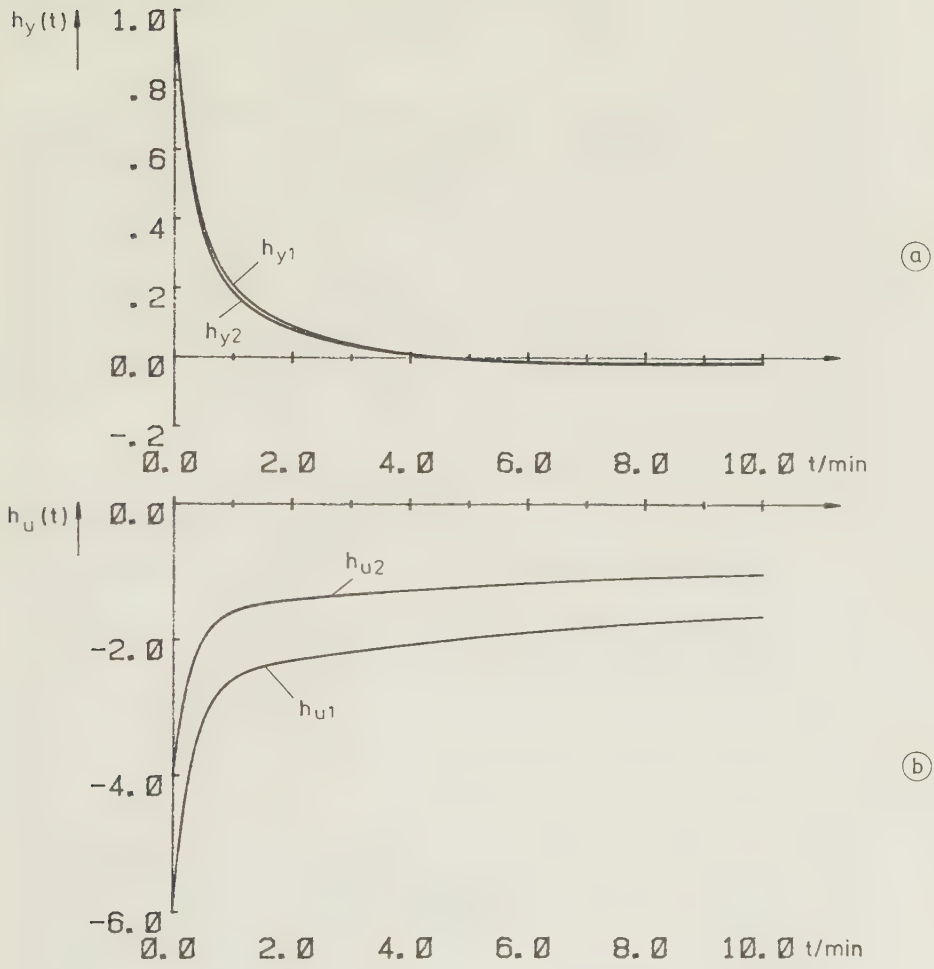


Bild 5.1.5. Übergangsfunktionen bei Anwendung von Regler 1
(a) Regelgröße $h_{yz}(t)$
(b) Stellgröße $h_{uz}(t)$
für Ausgangsstörungen $z_{A1} = s(t)$ und $z_{A2} = s(t)$

Einfachheit des Regelgesetzes und Robustheit gegenüber Unbestimmtheiten der Regelstrecke in den Kapiteln 4 und 5.1 ausführlich beschrieben sind.

Die notwendigen Kenntnisse zum Entwurf eines Mehrgrößen-PI-Reglers beschränkten sich im Kapitel 5.1 darauf, ein Modell nach Gl.(5.1.14) zu konstruieren. Hierzu sind nur Kenntnisse des statischen Verhaltens der Regelstrecke notwendig. Die Existenz geeigneter Reglerparameter ist hierbei durch die Gln.(5.1.21) und (5.1.22) gesichert. Da derzeit nur wenige Ansätze zur Synthese von Mehrgrößen-I- bzw. -PI-Reglern für nahezu unbekannte Regelstrecken existieren, ist es angebracht, die wesentlichen Grundzüge einer weiteren Synthesemethode mit identischer Zielsetzung zu untersuchen und bestehende Zusammenhänge zu diskutieren.

5.2.1 Entwurf von Mehrgrößen-I-Reglern für stabile Regelstrecken

In den folgenden Ausführungen soll ergänzend ein weiterer Lösungsansatz für die Regelung nicht vollständig bekannter Regelstrecken herausgearbeitet werden. Ausgangspunkt der in [21] vorgestellten Lösungsansätze ist eine Beschreibung des Systems in Form von

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u} \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

mit r Ausgangsgrößen und m Eingangsgrößen. Als Reglerübertragungsmatrix wird ein Mehrgrößen-I-Regler der Form

$$\underline{G}_R(s) = \frac{1}{s}\,\underline{K} \tag{5.2.2}$$

mit der reellen (mxr)-Koeffizientenmatrix $\underline{K}$ angesetzt. Das geregelte System hat demnach die Systemmatrix

$$\underline{A}_S = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B}\,\underline{K} \\ \underline{C} & \underline{D}\,\underline{K} \end{bmatrix} \tag{5.2.3}$$

und das charakteristische Polynom

$$P_S(s) = \det[s\underline{I} - \underline{A}_S] = \det \begin{bmatrix} s\underline{I} - \underline{A} & -\underline{B}\ \underline{K} \\ -\underline{C} & s\underline{I} - \underline{D}\ \underline{K} \end{bmatrix}, \tag{5.2.4}$$

welches dargestellt werden kann als

$$P_S(s) = \det(s\underline{I}_n - \underline{A})\ \det(s\underline{I}_r - \underline{D}\ \underline{K} - \underline{C}(s\underline{I}_n - \underline{A})^{-1}\ \underline{B}\ \underline{K})$$

$$= P_1(s)\ P_2(s) \tag{5.2.5}$$

mit

$$P_2(s) = \det(s\underline{I}_r - \underline{D}\ \underline{K} - \underline{C}(s\underline{I}_n - \underline{A})^{-1}\ \underline{B}\ \underline{K}). \tag{5.2.6}$$

Wird eine stabile Regelstrecke vorausgesetzt, darf $P_2(s)$ nur Nullstellen in der linken s-Halbebene enthalten. Das bedeutet, daß

$$P_2(s_i) \neq 0,\ \forall\ s_i \geq 0,\ s_i \in \mathbb{R} \tag{5.2.7}$$

erfüllt sein muß. Für alle s_i muß $P_2(s_i)$ das gleiche Vorzeichen besitzen. Für große s_i gilt in Gl.(5.2.6)

$$\det(s_i\ \underline{I}_r) > 0, \tag{5.2.8}$$

während für $s_i = 0$

$$\det[-(\underline{D} - \underline{C}\ \underline{A}^{-1}\ \underline{B})\ \underline{K}] > 0 \tag{5.2.9}$$

erfüllt sein muß. Hierbei ist

$$\underline{G}(0) = \underline{D} - \underline{C}\ \underline{A}^{-1}\ \underline{B} = \underline{K}_S \tag{5.2.10}$$

als (rxm)-Matrix der Streckenverstärkungen definiert. Gl.(5.2.9) stellt somit in der Form

$$\det(-\underline{K}_S\ \underline{K}) > 0 \tag{5.2.11}$$

eine notwendige Stabilitätsbedingung für das System nach Gl.(5.2.4) dar, wobei zusätzlich

$$\text{rang}(\underline{K}_S \; \underline{K}) = r \tag{5.2.12}$$

gefordert werden muß. Für $r > m$ folgt somit

$$\text{rang}(\underline{K}_S) = r \, . \tag{5.2.13}$$

Die Gln.(5.2.11) bis (5.2.13) und (5.1.13) bis (5.1.18) lassen insoweit eine gemeinsame Deutung zu, als hier nur Bedingungen für das statische Verhalten des Mehrgrößensystems gefordert werden. Da $\underline{K}_S$ nicht genau bekannt ist und die Gln.(5.2.11) bis (5.2.13) für alle möglichen $\underline{K}_S = \underline{K}_{SN} + \Delta\underline{K}_S$ erfüllt sein müssen, läßt sich analog zu Gl.(5.2.11) die Bedingung

$$\det(\underline{I} + \Delta\underline{K}_S \; \underline{K}_{SN}) > 0 \tag{5.2.14}$$

formulieren, wobei $\underline{K}_{SN}$ als "gedachter Bezugswert" der Verstärkungen verstanden werden kann und analog zu Gl.(5.2.13)

$$\text{rang } \underline{K}_{SN} = r$$

erfüllen muß. Auf spezielle Methoden zur Ermittlung der Reglereinstellwerte soll hier nicht näher eingegangen werden. Wesentlich für die im Kapitel 5.1 und 5.2 dargestellten ergänzenden Bemerkungen ist jedoch, daß es in vielen Fällen ausreicht, nur mit Hilfe von Informationen über die Statik der Regelstrecke robuste Regler zu entwerfen. Diese Informationen beschränken sich im ersten Fall auf grobe Abschätzungen des Verhaltens im oberen und unteren Frequenzbereich und im zweiten Fall auf die Erfüllung der Gln.(5.2.11) bis (5.2.13).

6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird im *Kapitel 1* eine direkte Synthesemethode vorgeschlagen, die es erlaubt, das Führungsverhalten und das Störungsverhalten mit Hilfe algebraischer Methoden vorzugeben. Das Entwurfsverfahren wird ergänzt durch eine Erweiterung der Regelkreisstruktur, die es ermöglicht, unmittelbar das Regelverhalten durch streckenparameterunabhängige Regelkreiselemente zu beeinflussen. Die Überprüfung dieser Verfahren mit den angegebenen Beispielen hat gezeigt, daß sie mit geringem numerischen Aufwand realisiert werden können.

Aufbauend auf dieser Methode wird im *Kapitel 2* ein Verfahren vorgeschlagen, das es gestattet, die Auswirkungen von Störungen auf mehrere Meßgrößen zu kompensieren. Dies geschieht dadurch, daß, ausgehend von Entwurfsmethoden im Zeitbereich, Zustands- und Störbeobachter in minimaler Realisierung im *Frequenzbereich* entworfen werden. Als Ergebnis der Überlegungen kann festgehalten werden, daß die gewonnenen Freiheitsgrade zur Störkompensation weiterer Meßgrößen genutzt werden können. Eine Erweiterung auf Systeme mit mehreren Stellgrößen erscheint wegen des großen numerischen Aufwandes nicht sinnvoll.

Im *Kapitel 3* wird eine Entwurfsmethodik für Mehrgrößensysteme hergeleitet, die als Darstellungsform die Inverse der Streckenübertragungsmatrix benutzt. Bei Anwendung einer Regelkreisstruktur, die auf dem sogenannten "Zustandsregler mit Beobachter im Frequenzbereich" basiert, sind hierdurch genügend Entwurfsspielräume zur Beeinflussung des Führ- und Störungsübertragungsverhaltens gegeben. Darüber hinaus wird ein Verfahren angegeben, das die Beeinflussung des Führungsübertragungsverhaltens mit Hilfe von streckenparameterunabhängigen Regelkreiselementen erlaubt.

Die Synthese von Regelungen für Strecken mit großen Unbestimmtheiten wird im *Kapitel 4* durchgeführt. Hier hat es sich als sinn-

voll erwiesen, die Verfahren zur Minimierung des Gütefunktionals und der Vorgabe von Stabilitätsgütegebieten zu kombinieren. Am Beispiel einer strukturvarianten Regelstrecke (Gleichstrommaschine im lückenden und nichtlückenden Betrieb) ist die robuste Auslegung des Regelkreises mit Hilfe einer dynamischen Ausgangsrückkopplung gezeigt worden.

Für die praktische Anwendung dieses Verfahrens liegt der Nachteil sicher darin, daß die Überschaubarkeit nur für eine kleine Anzahl von Reglerparametern gegeben ist. Abhilfe ist hier dadurch möglich, daß auf eine graphische Unterstützung verzichtet wird und der Entwurf vollständig algorithmisch formuliert wird. Vorteilhaft ist die Auswahl der Reglerparameter aus den ermittelten Bereichen. Hier besteht die Möglichkeit, zusätzliche Anforderungen beim Entwurf und der Inbetriebnahme zu berücksichtigen.

Die Ergebnisse aus *Kapitel 5* zeigen, daß eine Auslegung von Regelkreisen mit Hilfe von Minimalkenntnissen problemlos möglich ist, wenn die Regelstrecke stabil und minimalphasig ist. Insbesondere zeigt der Entwurf mit Hilfe des Approximationsansatzes, der nur Kenntnisse über die statischen Meßgrößen $\underline{C}$ und $\underline{B}$ verlangt, daß hier immer Kompromisse in Hinsicht auf Stellgrößenbegrenzung und "Schnelligkeit" der Regelung gemacht werden müssen. Da jedoch dieser Teilaspekt der Regelungstechnik in nächster Zukunft sicherlich an Bedeutung gewinnen wird, stellt die Diskussion der beiden Verfahren eine sinnvolle Ergänzung dar.

Literatur

[1] Ackermann, J.: Abtastregelung, Band II, Entwurf robuster Systeme. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.

[2] Bär, W.: Ein Frequenzbereichentwurfsverfahren für Mehrgrößenregelungen bei gleichzeitiger Berücksichtigung von Führungs- und Störverhalten. Regelungstechnik 29 (1981), S. 234-241.

[3] Böttiger, F. und Engell, S.: Entwurf von Zweigrößensystemen mit dem Mehrgrößen-Nyquist-Verfahren. Regelungstechnik 27 (1979), S. 250-259.

[4] Buxbaum, A. und Schierau, K.: Berechnung von Regelkreisen der Antriebstechnik. AEG-Telefunken Handbuch, Band 16, 1980.

[5] Cremer, M.: Entkopplung von Mehrgrößensystemen mit Reglern minimaler Ordnung. Dissertation Ruhr-Universität Bochum, 1970.

[6] Dastych, J.: Entwurf von Deadbeat-Regelungen für Mehrgrößensysteme. Interner Bericht ESR-8209, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

[7] Davies, W.: Systemerkennung für adaptive Regelungen. R. Oldenbourg Verlag, 1973.

[8] Doyle, C. und Stein, G.: Multivariable Feedback Design: Concepts for Classical/Modern Synthesis. IEEE Trans., AC-26 (1981), S. 4-16.

[9] Franzen, W.: Synthese und Erprobung digitaler Regler für eine Regelstrecke mit Totzeitverhalten. Diplomarbeit ESR-8017, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

[10] Gräser, A., Dickmann, M., Neddermayer, W.: Robuster Regelkreisentwurf: Das Verfahren von Horowitz und seine Automatisierung. Regelungstechnik 30 (1982), S. 387-392 und S. 428-433.

[11] Grotstollen, H.: Comparison of Speed Controlled DC-Drives with and without Subordinate Current Loop. 2nd IFAC Symposium in Power Electronics and Electrical Drives, Düsseldorf 1977.

[12] Hippe, P.: Zustandsregler in einläufigen Regelkreisen. Regelungstechnik 22 (1974), S. 388-394.

[13] Hippe, P. und Wurmthaler, Ch.: Ein einfaches Verfahren zum Entwurf von Zustandsreglern mit Störgrößenkompensation. Regelungstechnik 29 (1981), S. 91-96 und S. 131-136.

[14] Hippe, P. und Wurmthaler, Ch.: Ein Verfahren zum Entwurf von Zustandsreglern minimaler Ordnung mit Stör- und Führungsmodell. Regelungstechnik 29 (1981), S. 155-164.

[15] Horowitz, I.: Quantitative synthesis of uncertain multiple input-output feedback system. Int. J. Control, Vol. 30 (1979), S. 81-106.

[16] Horowitz, I. und Loecher, C.: Design of a 3x3 multivariable feedback system with large plant uncertainty. Int. J. Control, Vol. 33 (1981), S. 677-699.

[17] Jordan-Engeln, G. und Reutter, F.: Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit Standard-Fortran-Programmen. B.I.-Wissenschaftsverlag, Band 106 (1981).

[18] Jun, K.: Das dynamische Verhalten und die Regelung eines Kernkraftwerks. Teil II: Erstellung eines linearen mathematischen Modells. Interner Bericht ESR-7712, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

[19] Lee, G.: Output feedback system design via inverse systems. Int. J. Control, Vol. 34 (1981), S. 1125-1141.

[20] Linder, N.: Entwurf von Regelungen für Führungs- und Störverhalten. Diplomarbeit ESR-8117, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

[21] Lunze, J.: Notwendige Modellkenntnisse zum Entwurf robuster Mehrgrößenregler mit I-Charakter. Zeitschrift messen, steuern, regeln 25 (1982), S. 608-612.

[22] MacFarlane, A.: The Development of Frequency - Response Methods in Automatic Control. IEEE Trans.,AC-24 (1979), S. 250-265.

[23] Mayne, D.: The Design of Linear Multivariable Systems. Automatica, Vol. 9 (1973), S. 201-207.

[24] Owens, D.: Feedback and Multivariable Systems. Peter Peregrinus Ltd.,1978.

[25] Owens, D. und Chotai, A.: High Performance Controllers for Unknown Multivariable Systems. Automatica, Vol. 18 (1982), S. 583-587.

[26] Preuss, H.: Zustandsreglerentwurf durch näherungsweise Lösung der multilinearen Bestimmungsgleichung des Polvorgabeproblems. Regelungstechnik 27 (1979), S. 326-332.

[27] Rohde, F.: Einsatz des Mehrgrößen-Nyquist-Verfahrens für die SNR 300 Dampferzeuger-Regelung. Diplomarbeit ESR-8104, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

[28] Rosendahl, H.: Entwurf von Regelsystemen für Regelstrecken mit Totzeitverhalten unter Berücksichtigung von Führungs- und Störungsverhalten. Diplomarbeit ESR-8202, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

[29] Shaked, U. und MacFarlane, A.: Design of Linear Multivariable Systems for Stability under Large Parameter Uncertainty. Proc. IFAC-Symposium on Multivariable Technological Systems, Pergamon Press, 1977.

[30] Siemens AG.: Technische Unterlagen zum Demonstrationsmodell für Drehzahlregelung der Firma Siemens.

[31] Smith, M.: A controller to overcome dead time. ISA Journal, Vol. 6 (1959), S. 28-33.

[32] Stramka, H.: Modellerstellung eines geregelten, fremderregten Gleichstrommotors. Studienarbeit ESR-7910, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

[33] Unbehauen, H.: Regelungstechnik I, Vieweg-Verlag 1982.

[34] Unbehauen, H.: Regelungstechnik II, Vieweg-Verlag 1983.

[35] Unbehauen, H.: Unterlagen zum Grundlagenpraktikum Regelungstechnik I am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung der Ruhr-Universität Bochum

[36] Wang, C.-l.: Hippes Entwurfsverfahren eines Zustandsreglers minimaler Ordnung mit Stör- und Führungsmodell und seine Erweiterung. Interner Bericht ESR-8208, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

[37] Watanabe, K. und Ito, M.: A Process-Model Control for Linear Systems with Delay. IEEE Trans. AC-26 (1981), S. 1261-1269.

[38] Weber, W.: Ein systematisches Verfahren zum Entwurf linearer und adaptiver Regelungssysteme. ETZ-A Bd. 88 (1967), S. 138-144.

[39] Werner, T.: Entwurf robuster Regelungen mittels algebraischer Verfahren. Studienarbeit ESR-8216, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum.

[40] Wolowich, W.: Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag New York, 1974.

[41] Wolowich, W.: Output feedback decoupling. IEEE Trans., AC-20 (1975), S. 148-149.

[42] Wolowich, W.: Multipurpose Controllers for Multivariable Systems. IEEE Trans., AC-26 (1981), S. 162-181.

Zusammenstellung der wichtigsten Formelzeichen

$A(s,z)$	Nennerpolynom des Reglers mit den Koeffizienten a_i
$\underline{A}$	Systemmatrix allgemein
$\underline{A}_o$, $\underline{A}_1$	Approximationsmatrizen für die Streckenübertragungsmatrix
$\underline{A}_S$	Systemmatrix des geregelten Systems
$\underline{a}$	Parametervektor mit den Koeffizienten a_i
$B(s,z)$	Zählerpolynom des Reglers mit den Koeffizienten b_i
$\underline{B}$, $\underline{b}$	Steuermatrix (-vektor)
$\underline{B}_\varphi$	Koeffizientenmatrix für Zustandsreglerentwurf mit den Koeffizienten β_i
$\underline{B}_\psi$	Koeffizientenmatrix für Zustandsreglerentwurf mit den Koeffizienten a_i
$\underline{B}_1$, $\underline{B}_2$	Bewertungsmatrizen
$\underline{B}^*$	Entkopplungsmatrix
$C(s,z)$	Nennerpolynom der Regelstrecke mit den Koeffizienten c_i
$C_I(s,z)$	Nullstellen von $C(s)$ in linker s-Halbebene mit den Koeffizienten c_{iI}
$C_S(s,z)$	Nullstellen von $C(s)$ in rechter s-Halbebene mit den Koeffizienten c_{iS}
$\underline{C}$, $\underline{c}$	Ausgangsmatrix (-vektor)
$D(s,z)$	Zählerpolynom der Regelstrecke mit den Koeffizienten d_i
d	Dämpfungskonstante
$\underline{d}$	Parametervektor mit den Koeffizienten d_i
$\underline{E}(s,z)$, $\underline{e}(t,k)$	Regelabweichung
e_i	Induzierte EMK
$F_1(t)$, $F_2(t)$	Hubkräfte
$\underline{G}(s,z)$	Teilübertragungsmatrix des Störverhaltens
$G_M(s)$	Modellübertragungsfunktion
$G_{Ri}(s)$	Reglerübertragungsfunktion mit Störmodell
$G_{RW}(s)$	Reglerübertragungsfunktion mit Führungsmodell
$G_{Si}(s)$	Streckenübertragungsfunktion für Zustandsregelung

$G^{j}_{Sti}(s)$	Störübertragungsfunktion für Zustandsregelung
$G_{SZ}(s)$	Filter für deterministisches Störsignal
$G_1(s)$	Prädiktormodellübertragungsfunktion
$\underline{G}(s,z)$	Streckenübertragungsfunktion (-matrix)
$\underline{G}_R(s,z)$	Reglerübertragungsfunktion (-matrix)
$\underline{G}_{RU}(s,z)$, $\underline{G}_{RY}(s,z)$	Mehrgrößenregler
$\underline{G}_U(s,z)$	Stellgrößenübertragungsfunktion (-matrix)
$\underline{G}_{\ddot{u}}(s)$	Stellgrößenaufschaltung (-matrix)
$\underline{G}_V(s,z)$	Vorfilterübertragungsfunktion (-matrix)
$\underline{G}_W(s,z)$	Führungsübertragungsfunktion (-matrix)
$\underline{G}_Z(s,z)$	Störungsübertragungsfunktion (-matrix)
$\underline{G}^*(s,z)$	Polynommatrix der Regelstrecke
$g_y(s,z)$, $\underline{g}_u(s,z)$	Polynommatrizen für Mehrgrößenregler
$H_o(z)$	Polynom für Koeffizientenvergleich
HN(s,z)	Hauptnennerpolynom
$\underline{H}$	Ausgangsmatrix des Störmodells
$\underline{H}(s,z)$	Streckenapproximationsmatrix
$\underline{h}$	Reglerparametervektor für Zustandsreglerentwurf
J	Gesamtträgheitsmoment des Motors
K	Verstärkung, Konstante
K_A	Verstärkung des Motormodells
K_M	Motorverstärkung
K_V	Verstärkungsfaktor
K_1, K_2	Motorkonstante
$\underline{K}_{g\lambda}(s,z)$	Diagonalmatrix für Führungsverhalten mit den Elementen K_{gi}
$\underline{K}_h$, $\underline{K}_f$	Koeffizientenmatrix für Zustandsreglerentwurf mit den Koeffizienten α_i, l^j_i und γ^j_i bzw. c^j_i und η_i
$\underline{K}_W(s,z)$	Modellübertragungsfunktion (-matrix) für das Führungsverhalten
$\underline{K}_Z(s,z)$	Modellübertragungsfunktion (-matrix) für das Störverhalten
$\underline{k}_z$	Parametervektor mit den Koeffizienten δ_i und γ_i
L_a	Ankerinduktivität

$M(s)$	Zählerpolynom des Vorfilters mit den Koeffizienten m_i
$M(t)$	Drehmoment
m	Grad des Polynoms $D(s)$
$\underline{M}$, $\underline{M}_N$	Parametermatrix mit den Koeffizienten d_i und c_i
$\underline{m}$, $\underline{m}_N$	Koeffizientenvektor mit den Koeffizienten c_i
$N(s)$	Nennerpolynom des Vorfilters mit Koeffizienten n_i
$N_R(s)$	Nennerpolynom von $G_{Ri}(s)$ und $G_{RW}(s)$
$N'_R(s)$	Nennerpolynom von $G_{Ri}(s)$ und $G_{RW}(s)$ ohne das charakteristische Polynom des Störverhaltens mit Koeffizienten p_i
$N_S(s)$	Nennerpolynom von $G^j_{Sti}(s)$
$N_1(s)$	Nennerpolynom von $G_1(s)$
n	Grad des Polynoms $C(s)$
$n(t)$	Drehzahl
n_I	Grad des Polynoms $C_I(s)$
n_S	Grad des Polynoms $C_S(s)$
$P(s,z)$	charakteristisches Polynom mit den Koeffizienten p_i
$P_B(s)$	Beobachterpolynom mit den Koeffizienten φ^j_i
$\hat{P}_B(s)$	charakteristisches Polynom von Zustands- und Störbeobachter mit den Koeffizienten φ_i
$P_C(s)$	charakteristisches Polynom für Zustandsregelung
$P_{STM}(s)$	charakteristisches Polynom des geregelten Störmodells
$P_{STR}(s)$	Polvorgabepolynom für Zustandsregelung
p	Grad des Polynoms $\delta(s)$
$\underline{P}(s)$	Polynommatrix
$\underline{p}$, $\underline{p}_N$	Vektor mit den Koeffizienten p_i des charakteristischen Polynoms
$Q(s)$, $Q_\varepsilon(s)$	Fehlerübertragungsfunktion
q	Grad des Polynoms $\gamma(s)$
$\underline{Q}$	Transformationsmatrix, Störmatrix
$\underline{Q}(s)$	Polynommatrix
R_a	Ankerwiderstand
$\underline{r}$, $\underline{r}_N$	Reglerparametervektor
$S_1(s)$, $S_2(s)$	Zählerpolynome des Störübertragungsverhaltens für Zustandsregler
$\underline{S}$	Systemmatrix des Störmodells

T_A	Ankerzeitkonstante
T_M	Motorzeitkonstante
T_t	Totzeit
U_M, U_{M1}, U_{M2}	Motorspannung
U_o	Motorspannung im Arbeitspunkt
U_φ	Spannung proportional zum Drehwinkel
u	Grad des Polynoms $\beta(s)$
$\underline{U}(s,z)$, $\underline{u}(t,k)$	Stellgrößenvektor
v	Grad des Polynoms $\alpha(s)$
$\underline{v}$	Zustandsvektor des Störmodells
w	Grad des Polynoms B(s)
$\underline{W}(s,z)$, $\underline{w}(t,k)$	Sollwertvektor
x	Grad des Polynoms M(s)
$\underline{X}$	Störmatrix
$\underline{x}$	Zustandsvektor
y	Grad des Polynoms N(s)
$\underline{Y}(s,z)$, $\underline{y}(t,k)$	Reglergrößenvektor
Z(s)	Nullstellenpolynom
$Z_{Ri}(s)$	Zählerpolynom von $G_{Ri}(s)$ mit Koeffizienten e_k^i
$Z_{RW}(s)$	Zählerpolynom von $G_{RW}(s)$
Z_{Si}	Zählerpolynom von G_{Si} mit den Koeffizienten c_o^i
$Z_{Sti}^j(s)$	Zählerpolynom von $G_{Sti}^j(s)$ mit den Koeffizienten d_k^{ji}
$Z_1(s)$	Zählerpolynom von $G_1(s)$ mit den Koeffizienten z_i
z	Grad des Polynoms A(s)
$\underline{Z}(s,z)$, $\underline{z}(t,k)$	Störgrößenvektor
$\underline{Z}_A(s,z)$	Störgrößenvektor am Streckenausgang
$\underline{Z}_E(s,z)$	Störgrößenvektor am Streckeneingang
$\underline{z}(t)$	Ausgangsvektor des Störmodells

α	Zählerpolynom der Modellführungsübertragungsfunktion mit den Koeffizienten α_i
β	Nennerpolynom der Modellführungsübertragungsfunktion mit den Koeffizienten β_i
γ	Zählerpolynom der Modellstörübertragungsfunktion mit den Koeffizienten γ_i
$\underline{\gamma}'$	Parametervektor mit γ_i
$\underline{\gamma}_1$, $\underline{\gamma}_2$	Transformationsvektoren
$\delta(s)$	Nennerpolynom der Modellstörübertragungsfunktion mit den Koeffizienten δ_i
$\underline{\delta}(t)$	Eingangsvektor des Störmodells
$\underline{\delta}$	Koeffizientenvektor für Zustandsreglerentwurf mit den Koeffizienten $\beta_i - a_i$
$\Delta a(s)$, $\Delta f(s)$	Teilpolynome des charakteristischen Polynoms
$\underline{\varepsilon}$	Bewertungsvektor für das charakteristische Polynom
$\underline{\eta}(t)$	Eingangsvektor des Führungsmodells
$\underline{\vartheta}$	Ausgangsvektor des Führungsmodells
Θ	Gesamtträgheitsmoment
λ	Grad des Polynoms $\psi(s)$
$\underline{\lambda}$	Diagonalmatrix
$\sigma(t)$	Eingangsvektor des Störmodells
σ_L, σ_R, σ_o	Reelle Nullstellen
φ	Winkel
$\underline{\varphi}$	Koeffizientenvektor für Zustandsreglerentwurf mit den Koeffizienten φ_i
ϕ	magnetischer Fluß
$\psi(s)$	Polynom zur Beeinflussung des Störverhaltens mit den Koeffizienten ψ_i
$\underline{\psi}$	Koeffizientenvektor für Zustandsreglerentwurf mit den Koeffizienten ψ_i
$\underline{\omega}(t)$	Zustandsvektor des Führungsmodells
ω_o	normierte Kreisfrequenz

$(\cdot)$	Grad eines Polynoms
$\partial_i[\cdot]$	maximaler Grad der Spalte einer Polynommatrix

Johannes Dastych

Lebenslauf

16.6.1947	geboren in Bochum
1953 - 1958	Volksschule in Bochum
1958 - 1964	Realschule in Bochum
1964 - 1968	Industrielehre und Industrietätigkeit bei der Fried. Krupp Hüttenwerke AG, Werk Bochum
1968 - 1969	Wehrdienst
1970 - 1973	Studium der Elektrotechnik an der Fachhochschule Bochum
1973 - 1977	Studium der Elektrotechnik an der Ruhr-Universität Bochum
ab 1977	Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Ruhr-Universität Bochum

Bochum, im Oktober 1983

DER DRUCKER · (Alte) Buscheystraße 138 · 4630 Bochum 1 · Telefon (0234) 70 41 16